

Н. ВЕКСЛЕР

О ПРИМЕНЕНИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МАКДОНАЛЬДА ПРИ АНАЛИЗЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

N. VEKSLER. MACDONALDI FUNKTSIOONIDE RATSIONAALSE LÄHENDUSE KASUTAMISEST TELGSÜMMEETRILISE LAINEPROTSESSI UURIMISEL RINGPLAATIDES LAPLACE'I TEISENDUSE MEETODIL

N. VEKSLER. ON THE USE OF RATIONAL APPROXIMATION OF MACDONALD FUNCTIONS IN THE ANALYSIS OF AXIALSYMMETRIC TRANSIENT WAVES IN RING PLATES BY THE LAPLACE TRANSFORM METHOD

Многие задачи об осесимметричных нестационарных процессах деформации круглых пластин и пологих сферических оболочек [1-5] могут быть исследованы методом интегрального преобразования Лапласа. При обращении контурных интегралов встречаются выражения, в которых в качестве сомножителей входят частные функций Макдональда нулевого и первого порядков от различных аргументов. В таких случаях точные обращения трудны, если не невозможны. Известные асимптотические методы обращения контурных интегралов при малых и больших значениях параметра преобразования соответствуют прикраевой и прифронтальной асимптотикам. Области их применимости на плоскости координата-время весьма узки. Желательно иметь возможность провести обратное преобразование, используя легко применимую аппроксимацию функций с тем, чтобы описать волновой процесс деформации на всей плоскости координата-время. В статье [6] дана рациональная аппроксимация функций Макдональда, которая была использована в настоящей заметке при анализе осесимметричного нестационарного процесса деформации круглой пластины в своей плоскости. Результаты подтверждают эффективность выбранного способа.

При малых и больших значениях аргумента имеют место известные представления функций Макдональда нулевого и первого порядков [7]. В статье [6] предложены асимптотические представления для функций Макдональда при средних значениях аргумента:

$$K_0(z) \sim f(z)P_n(z), \quad K_1(z) \sim f(z)Q_n(z), \quad (1)$$

где

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \quad P_n(z) = \frac{z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_0}{z^n + B_{n-1}z^{n-1} + \dots + B_0},$$
$$Q_n(z) = \frac{z^n + C_{n-1}z^{n-1} + \dots + C_0}{z^n + D_{n-1}z^{n-1} + \dots + D_0}. \quad (2)$$

Константы подбираются так, чтобы добиться совпадения рационального приближения с данными значениями функции в узловых точках из рассматриваемого интервала. При $z=0$ функции K_0 и K_1 имеют особенности, не учтенные в (1), в связи с чем при $z \rightarrow 0$ не происходит перехода от представлений (1) к известным представлениям; при $z \rightarrow \infty$ такой переход имеется.

Перейдем к рассмотрению осесимметричного волнового процесса деформации круглой пластины в своей плоскости. Пусть E , ν , ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины, u_r — тангенциальное перемещение, u — безразмерное тангенциальное перемещение, r — радиальная координата, r_0 — фиксированное значение радиуса, α — безразмерная координата, τ — время, t — безразмерное время, t_1 — расстояние от фронта волны, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда. При этом

$$u = r_0^{-1} u_r, \quad \alpha = r_0^{-1} r, \quad \alpha_1 = \alpha - 1, \quad t = \left[\frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2} r_0^{-1} \tau, \quad t_1 = t - \alpha_1. \quad (3)$$

$$\text{Уравнение движения} \quad (\partial_\alpha^2 + \alpha^{-1} \partial_\alpha - \alpha^{-2} - \partial_t^2) u = 0. \quad (4)$$

$$\text{Начальные условия при } t=0 \quad u = \partial_t u = 0. \quad (5)$$

$$\text{Краевое условие при } \alpha_1=0 \quad \partial_t u = H(t). \quad (6)$$

В той части пластины, которой еще не достигли волны деформации, сохраняется покой, т. е.

$$u(\alpha_1, t) = 0, \quad \alpha_1 > t. \quad (7)$$

Рассмотрим выходящие волны, не исследуя отражения от края. Для решения задачи применим интегральное преобразование Лапласа [8]. Решение уравнения (4) при краевом условии (6) в пространстве преобразования имеет вид

$$u^L = s^{-2} K_1^{-1}(s) K_1(s\alpha). \quad (8)$$

Применяя при обращении (8) формулы (1), (2), при $n=1$ и $n=2$ соответственно получим

$$u(\alpha, t) \sim \alpha^{-1/2} [a_0 + t_1 + a_1 \exp(-b_1 t_1) + a_2 \exp(-b_2 t_1)] H(t_1) \quad (9)$$

$$\text{и} \quad u(\alpha, t) \sim \alpha^{-1/2} \left[c_0 + t_1 + \sum_{j=1}^4 c_j \exp(-d_j t_1) \right] H(t_1). \quad (10)$$

Приближенные выражения (9), (10) для тангенциального перемещения u можно трактовать как последовательные первое и второе приближения решений. Следующие приближения можно получить, если использовать полиномы (2) более высоких степеней n . Используя при обращении (8) асимптотические формулы, при малых и больших значениях аргумента соответственно имеем

$$u(\alpha, t) \sim \frac{t}{\alpha} \quad (11)$$

$$\text{и} \quad u(\alpha, t) \sim \alpha^{-3/2} \left\{ t_1 + \frac{8}{3} \alpha_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{3}{8} t_1\right) \right] \right\} H(t_1). \quad (12)$$

Формула (11) хорошо описывает тангенциальное перемещение u вблизи края, формула (12) — вблизи фронта волны, формулы (9) и (10) — во всей возмущенной зоне.

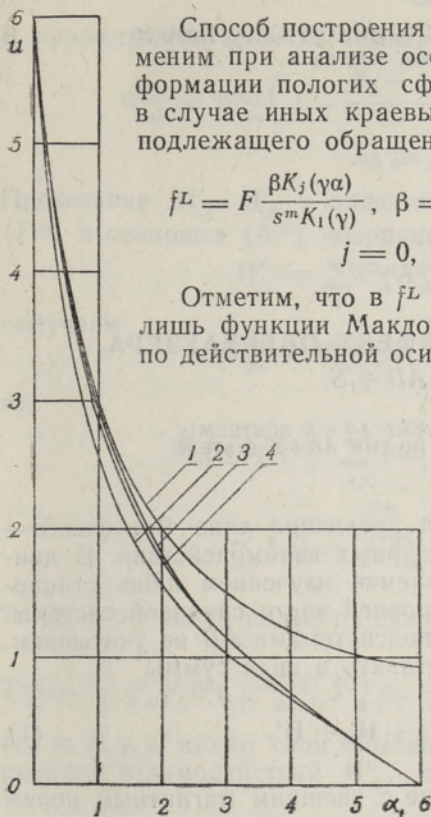
В качестве примера приведем графики тангенциального перемещения u , вычисленного по приближенным формулам при фиксированном значении безразмерного времени $t=6$. Кривая 1 соответствует формуле (11), кривая 2 — формуле (12), кривая 3 — формуле (10). Для сравнения приведена кривая 4, соответствующая численно вычисленному u по методу сеток на ЭЦВМ «Минск-32» из уравнения (4).

Способ построения приближенных решений типа (10) применим при анализе осесимметричных волновых процессов деформации пологих сферических оболочек и круглых пластин в случае иных краевых воздействий. Характерное слагаемое подлежащего обращению выражения обычно имеет вид

$$f^L = F \frac{\beta K_j(\gamma \alpha)}{s^m K_1(\gamma)}, \quad \beta = 1 + \frac{q}{s^2}, \quad \gamma = s \left(1 + \frac{g}{s^2} \right), \quad (13)$$

$$j = 0, 1, m = 2, 3, 4, \dots$$

Отметим, что в f^L представления (1) удачно приближают лишь функции Макдональда, причем аппроксимация ведется по действительной оси. Использование представлений (1) при обращении (13) не учитывает особых точек f^L , которые играют существенную роль. При заданном n в зависимости от выбора узловых точек P_n и Q_n в (2) различаются постоянными [6]. Начиная с $n=2$, возникает противоречие между разложением P_n и Q_n по возрастающим степеням s и разложением γ по нисходящим степеням s . Построение решения типа (10) оправдано тем, что хотя оно не столь точно на всей плоскости координата-время, но за фронтом волны оно лучше прифронтальной асимптотики и область его применимости шире.



ЛИТЕРАТУРА

1. Кромм А., ZAMM, 28, 104 (1948).
2. Кромм А., ZAMM, 28, 297 (1948).
3. Miklowitz J., J. Appl. Mech., 27, 165 (1960).
4. Векслер Н. Д., Мянниль А. И., Нигул У. К., Прикл. мех., 1, № 12, 38 (1965).
5. Векслер Н. Д., Нигул У. К., МТТ, 1, 74 (1966).
6. Bickford W. B., ZAMP, 17, 362 (1966).
7. Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, М., 1964, с. 169.
8. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., 1960.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/III 1970