A. MARTINS

CALCULATION OF UNSTABLE THERMAL REGIMES OF A LIQUID SLAG LAYER

This paper is concerned with the thermal and hydrodynamical processes of a slag layer in unstable heat exchange conditions on the surfaces of furnace. Equations for calculating the continuance of unstable thermal regimes in the slag layer (19 and 21) have been obtained. By these equations it is possible to determine with sufficient accuracy the influence of the slag layer on the regulation of the thermal load of the furnace. The equations in this paper are in force for the Estonian oil shale slag, but the calculation scheme may be used for other fuel slags as well.

LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.13

Э. РАЙК

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

E. RAIK. ERINEVALT PÜSTITATUD STOHHASTILISE PROGRAMMEERIMISE ÜLESANNETE LAHENDITE VORDLUS

E. RAIK. COMPARISON OF SOLUTIONS IN DIFFERENT FORMULATIONS OF THE STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS

1. Рассмотрим проблему минимизации действительной функции $f(x)$ по n-мерному вектору x с функцией ограничения, зависящей от случайного вектора η с конечным математическим ожиданием. Исходя из физико-вероятностных соображений, задачу можно сформулировать разным образом. Распространены P-модели и E-модели задач, где P-модель формулируется следующим образом:

$$\inf_x f(x) = f_\alpha \tag{1}$$

при условии

$$P[g(x, \eta) \leqslant 0] \geqslant \alpha. \tag{2}$$

В формулировке E-модели используем те же функции $f(x)$ и $g(x, \xi)$, тогда

$$\inf_x f(x) = f \tag{3}$$

при условии

$$Eg(x, \eta) \leqslant 0. \tag{4}$$

Приведем еще формулировку детерминированной задачи нелинейного программирования:

$$\inf_x f(x) = \overline{f} \tag{5}$$

при условии

$$g(x, E\eta) \leqslant 0. \tag{6}$$

Исследуем соотношения между величинами f_α, f и $\overline{f}$. Если определить множества: $Q_\alpha = \{x : P[g(x,\eta) \leqslant 0] \geqslant \alpha\}$,

$$Q = \{x : Eg(x,\eta) \leqslant 0\} \quad \text{и} \quad \overline{Q} = \{x : g(x, E\eta) \leqslant 0\}, \quad \text{то}$$

эти соотношения характеризуются взаимоотношениями множеств Q_α, Q и Q. Непосредственно из определений следует, что если $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, то $Q_1 \subset Q_\beta \subset Q_\alpha \subset Q_0$. Простой является и связь между Q и $\overline{Q}$, а именно: по неравенству Йенсена для выпуклых по η функций при каждом x имеем $Q \subset \overline{Q}$, для вогнутых по η функций — $\overline{Q} \subset Q$, а для линейных по η функций имеем $\overline{Q} \supseteq Q$.

Более сложным образом связаны множества $\overline{Q}$ и Q_α.

Лемма. *Пусть случайная величина η распределена симметрично. Тогда*:

1) *если функция $g(x,\eta)$ вогнута по η, то $\overline{Q} \subset Q_{\frac{1}{2}}$;*

2) *если функция $g(x,\eta)$ выпукла по η, то для любого $\varepsilon > 0$*

$Q_{\frac{1}{2}+\varepsilon} \subset \overline{Q}$;

3) *если функция $g(x,\eta)$ линейна по η, то* $Q_{\frac{1}{2}+\varepsilon} \subset \overline{Q} = Q \subset Q_{\frac{1}{2}}$.

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \in \overline{Q}$, т. е. $g(x_1, E\eta) \leqslant 0$. Заметим, что $P[g(x_1,\eta) \leqslant 0] = 1 - P[g(x_1,\eta) > 0]$. Обозначим множество $R_1 = \{\eta : g(x_1,\eta) > 0\}$ и определим множество $R_2 = \{\eta : 2E\eta - \xi,\ \xi \in R_1\}$. В силу вогнутости $g(x,\eta)$ по η множество R_1 выпукло и по предположению $E\eta \notin R_1$, но тогда по конструкции и R_2 выпукло и $E\eta \notin R_2$. Следовательно, $R_1 \cap R_2 = \varnothing$ и $P[\eta \in R_1 \cup R_2] = P[\eta \in R_1] + P[\eta \in R_2] \leqslant 1$.

По симметричности распределения случайной величины η относительно $E\eta$ имеем $P[\eta \in R_1] = P[\eta \in R_2] \leqslant \frac{1}{2}$ и поскольку $P[\eta \in R_1] = P[g(x_1,\eta) > 0]$, то $P[g(x_1,\eta) \leqslant 0] = 1 - P[\eta \in R_1] \geqslant \frac{1}{2}$, т. е. $x_1 \in Q_{\frac{1}{2}}$ и $\overline{Q} \subset Q_{\frac{1}{2}}$, что и требовалось доказать.

2) Предположим обратное: пусть $\bar{x} \in Q_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ и $\bar{x} \notin \overline{Q}$, т. е. $P[g(\bar{x}, \eta) \leqslant 0] \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$, а $g(\bar{x}, E\eta) > 0$. Разумеется, что $P[g(\bar{x},\eta) \leqslant 0] = 1 - P[g(\bar{x},\eta) > 0]$. Обозначим множество $R_1 = \{\eta : g(\bar{x},\eta) \leqslant 0\}$ и определим $R_2 = \{\eta : 2E\eta - \xi,\ \xi \in R_1\}$. В силу выпуклости $g(x,\eta)$ по η множество R_1 выпукло и по обратному предположению $E\eta \notin R_1$. Тогда R_2 также выпукло, а $E\eta \notin R_2$. Аналогично доказательству первого

пункта тогда получаем, что $P[g(\bar{x},\eta)\leqslant 0]=\int\limits_{R_1} dF(\eta)=\int\limits_{R_2} dF(\eta)\leqslant\frac{1}{2}$.

Противоречие с предположением доказывает утверждение.

3) Так как линейная функция является одновременно выпуклой и вогнутой, то $Q_{\frac{1}{2}+\varepsilon}\subset\overline{Q}\subset Q_{\frac{1}{2}}$, и так как дополнительно для линейных функций $g(x,E\eta)=Eg(x,\eta)$, то $Q=\overline{Q}$.

Замечание. Если дополнительно к предположениям леммы случайная величина η «распределена во всем пространстве» (т. е. если мера Эвклида множества $\mu R>0$, то и $P[\eta\in R]>0$), тогда имеем $Q_{\frac{1}{2}}=\overline{Q}=$ $=Q$.

Это условие выполняется, например, для нормального распределения. Следовательно, если выполнены данные условия, то стохастические задачи (1)—(2) и (3)—(4) являются эквивалентными детерминированной задаче с ограничением вида $g(x,E\eta)\leqslant 0$.

При сравнении решений разных задач в общем случае можно опираться на следующую теорему.

Теорема. *Пусть случайная величина η распределена симметрично относительно E_η, тогда:*

1) *если функция $g(x,\eta)$ выпукла по η, то*

$$\mathfrak{f}_\alpha\geqslant\bar{\mathfrak{f}}\quad и\quad \mathfrak{f}\geqslant\bar{\mathfrak{f}}\quad для\quad \alpha>\frac{1}{2};$$

2) *если функция $g(x,\eta)$ вогнута по η, то*

$$\mathfrak{f}_\alpha\leqslant\bar{\mathfrak{f}},\quad \mathfrak{f}\leqslant\bar{\mathfrak{f}}\quad для\quad \alpha\leqslant\frac{1}{2};$$

3) *если функция $g(x,\eta)$ линейна по η, то*

$$\mathfrak{f}_\alpha\leqslant\mathfrak{f}=\bar{\mathfrak{f}}\leqslant\mathfrak{f}_\beta\quad для\quad \alpha\leqslant\frac{1}{2},\quad \beta>\frac{1}{2};$$

4) *если функция $g(x,\eta)$ линейна и выполнено предположение, приведенное в замечании, то $\mathfrak{f}_{\frac{1}{2}}=\mathfrak{f}=\bar{\mathfrak{f}}$.*

2. Сделаем еще несколько замечаний относительно минимизации действительной функции, зависящей от случайного вектора ξ. Тогда в различных моделях можем иметь дело с разными функциями:

$$P[f(x,\xi)\geqslant\gamma], \tag{7}$$

$$Ef(x,\xi) \tag{8}$$

или

$$f(x,E\xi). \tag{9}$$

Полное совпадение функций $Ef(x,\xi)=f(x,E\xi)$ имеет место лишь для линейных по ξ функций. Но задачи минимизации легко сравнимы и в случае, если функция $f(x,\xi)$ является сепарабельной по x и ξ, т. е. $f(x,\xi)=f_1(x)+f_2(\xi)$. В этом случае, хотя функции и не равны, точки минимума для задач минимизации с одними и теми же ограничениями и разными функциями минимизации (7)—(9) совпадают. Такая эквивалентность имеет место и в задачах минимизации с функциями (8) и (9) в случае, если

$$f(x,\xi)=f_1(x)+f_2(\xi)+(f_3(x),\xi), \tag{10}$$

где $(f_3(x), \xi)$ означает скалярное произведение векторов $f_3(x)$ и ξ. Класс функций (10) содержит и функции, рассмотренные Х. Тейлом [1], для которых он доказал указанную эквивалентность.

Если функция $f(x, \xi)$ зависит от вектора ξ квадратично, и нам дополнительно известны вектор математического ожидания $E\xi$ и матрица дисперсии $D\xi$ случайного вектора ξ, то нам полезно пользоваться следующей формулой [2]:

$$Ef(x, \xi) = f(x, E\xi) + (E\xi, f''_{\xi\xi}(x, E\xi) E\xi) + \mathrm{trace}\,(f''_{\xi\xi}(x, E\xi) \cdot D\xi), \qquad (11)$$

где $f''_{\xi\xi}(x, E\xi)$ — матрица вторых частных производных по компонентам ξ. Формула (11) позволяет освободиться от оператора усреднения и тем самым упростить вычислительный процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Theil H., Econometrics, 25, 346 (1957).
2. Plackett R. L., Principles of regression analysis, Clarendon Press, Oxford, 1960, p. 16.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/I 1970