EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.06

А. ЛАХЕ, Л. ПОВЕРУС

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАЗРЫВОВ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В статье рассматриваются разрывы деформации в цилиндрической оболочке на базе геометрически нелинейных уравнений типа Тимошенко. Для определения соотношений разрывов деформации в оболочке были использованы вариационный принцип и законы сохранения. Определяются также характеристические направления и подтверждается положение, что линии сильных разрывов уже не являются характеристиками.

1. Для вывода уравнений движения цилиндрической оболочки представим вектор перемещения точки оболочки в случае осесимметрической деформации в следующем виде:

$$u = [u_1(x,t) + z\psi(x,t)]\bar{e}_x + w_1(x,t)\bar{e}_n, \tag{1}$$

где x — координата в направлении оси оболочки, t — время, u_1 и w_1 — составляющие перемещения срединной поверхности оболочки, ψ — угол поворота нормали срединной поверхности оболочки в плоскости xz; e_x, e_n — единичные векторы в направлении образующей и нормали к срединной поверхности оболочки. В дальнейшем воспользуемся безразмерными величинами, обозначая

$$u = \frac{u_1}{R}, \quad w = \frac{w_1}{R}, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{R}, \tag{2}$$

где $c_1 = [\mathrm{E}/(1-\nu^2)\varrho]^{1/2}$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ϱ — плотность материала, R — радиус оболочки.

Представим соотношения упругости в следующем виде:

$$\begin{gathered} N_\xi = \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w \right], \quad N_\theta = \left[\nu \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) - w \right], \\ Q_\xi = \varkappa^2(w' + \psi), \quad M_\xi = \varepsilon^2 \psi'. \end{gathered} \tag{3}$$

Геометрически нелинейные уравнения движения осесимметричной деформации оболочки [1] в перемещениях принимают вид

$$\left\{ \begin{aligned} & u'' + w'w'' - \nu v' - \ddot{u} = 0, \\ & \nu \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 - w \right) + \left[\left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w \right) w' \right]' + \\ & + \varkappa^2(w'' + \psi') - \ddot{w} = 0, \\ & \varepsilon^2 \psi'' - \varkappa^2(w' + \psi) - \varepsilon^2 \ddot{\psi} = 0. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

2. Выведем условия для разрывов, используя вариационный принцип в форме, изложенной в работе [2] для исследования сплошной среды,

$$\delta \int\limits_{S} L\, d\xi\, d\tau = 0. \tag{5}$$

В этом выражении функция Лагранжа для рассматриваемой задачи представляется в следующем виде:

$$L = \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w \right] \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right] + \varepsilon^2 (\psi')^2 -$$
$$- \left[\nu \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 - w \right) \right] w + \varkappa^2 (w' + \psi)^2 - \dot{u}^2 - \dot{w}^2 - \varepsilon^2 \dot{\psi}^2. \tag{6}$$

Пусть разрыв происходит на линии C, уравнение которой

$$F(\xi, \tau) = 0. \tag{7}$$

Линия C делит площадь $S(\xi, \tau)$ на две части: S_{0+} и S_{0-}. В качестве линии сравнения принимаем линию C. Варьирование площади производим при помощи виртуального смещения

$$\delta l = n_\xi \delta_\xi + n_\tau \delta_\tau, \tag{8}$$

где n_ξ и n_τ, компоненты единичного вектора нормали к линии разрыва C, определяются соотношениями

$$n_\xi = \frac{F'}{\sqrt{(F')^2 + (\dot{F})^2}}, \quad n_\tau = \frac{\dot{F}}{\sqrt{(F')^2 + (\dot{F})^2}}. \tag{9}$$

Выражение для полной вариации функционала по области можно представить в виде

$$\delta \int\limits_{S_{0+}} L\, d\xi\, d\tau = \int\limits_{S_{0+}} \delta L\, d\xi\, d\tau + \int\limits_{C} L (n_\xi \delta_\xi + n_\tau \delta\tau)\, dC =$$
$$= \int\limits_{S_{0+}} \left\{ \left[-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right)^{\cdot} - \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right)' \right] (\delta u) + \left[-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right)^{\cdot} - \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \right)' + \frac{\partial L}{\partial w} \right] (\delta w) + \right.$$
$$\left. + \left[-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right)^{\cdot} - \left(\frac{\partial L}{\partial \psi'} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \psi} \right] (\delta \psi) \right\} d\xi\, d\tau + \tag{10}$$
$$+ \int\limits_{C} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} n_\tau + \frac{\partial L}{\partial u'} n_\xi \right) (\delta u) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} n_\tau + \frac{\partial L}{\partial w'} n_\xi \right) (\delta w) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} n_\tau + \frac{\partial L}{\partial \psi'} n_\xi \right) (\delta \psi) \right\} dC + \int\limits_{C} L (n_\xi \delta_\xi + n_\tau \delta\tau)\, dC = 0.$$

Подставляем в уравнение (10) функцию Лагранжа (6) и учитываем, что [2]

$$(\delta u) = \delta u - \dot{u}\delta\tau - u'\delta\xi, \quad (\delta w) = \delta w - \dot{w}\delta\tau - w'\delta\xi,$$
$$(\delta\psi) = \delta\psi - \dot{\psi}\delta\tau - \psi'\delta\xi, \tag{11}$$

где вариации в скобках $(\ldots)$ берутся при $\delta\xi = \delta\tau = 0$. Аналогичным образом получим вариацию функционала по области S_{0-}. В полученных выражениях вариации (10) первый член, интеграл по площади, равняется нулю в силу уравнений движения (4). Выражения для суммы вариаций по областям S_{0+} и S_{0-} могут быть применены для определения соотношений на линии разрыва. Группируем эти соотношения по вариациям $\delta\xi$, $\delta\tau$, δu, δw и $\delta\psi$.

Соотношения при $\delta\xi$ и $\delta\tau$ можно представить в виде следующих выражений:

$$-(\lambda u' + \dot{u})^2 + (u')^2(\lambda^2 - 1) - \varepsilon^2(\lambda\psi' + \dot{\psi})^2 + \varepsilon^2(\psi')^2(\lambda^2 - 1) - \\ -(\lambda w' + \dot{w})^2 - 2u'(w')^2 - \frac{3}{4}(w')^4 - \varkappa^2(w')^2 + (w')^2\lambda^2 = 0, \tag{12}$$

$$(u')^2(\lambda^2 - 1) + \varepsilon^2(\psi')^2(\lambda^2 - 1) + (w')^2\lambda^2 - \frac{3}{4}(w')^4 - \varkappa^2(w')^2 - \\ - 2u'(w')^2 = 0, \tag{13}$$

где $\lambda = -\dfrac{n_\tau}{n_\xi}$ — скорость распространения линии разрыва.

Уравнение (12) удовлетворяется тождественно в силу уравнения (13) и следующих кинематических условий совместности [3]:

$$[\dot{u}] + \lambda[u'] = 0, \quad [\dot{w}] + \lambda[w'] = 0, \quad [\dot{\psi}] + \lambda[\psi'] = 0. \tag{14}$$

Уравнения при вариациях δu, δw и $\delta\psi$ в выражении (10) дают следующие условия разрывов:

$$-[\dot{u}]\lambda = \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w\right], \\ -[\dot{w}]\lambda = \left[\left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w\right)w' + \varkappa^2(w' + \psi)\right], \quad -[\dot{\psi}]\lambda = [\psi']. \tag{15}$$

Из уравнений (13) получим для разрывов еще одно условие

$$\left[(u')^2(\lambda^2 - 1) + \varepsilon^2(\psi')^2(\lambda^2 - 1) + (w')^2\lambda^2 - \frac{3}{4}(w')^4 - \right. \\ \left. - \varkappa^2(w')^2 - 2u'(w')^2\right] = 0. \tag{16}$$

Таким образом, при помощи вариационного принципа были получены для разрывов условия (15) и (16).

3. Исходя из законов сохранения, для системы уравнений

$$\dot{p} + q' + r = 0 \tag{17}$$

получим для разрывного решения следующие соотношения [4]:

$$n_\tau[p] + n_\xi[q] = 0. \tag{18}$$

В рассматриваемой задаче

$$p = \begin{vmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \varepsilon^2\dot{\psi} \\ N_\xi - \frac{1}{2}(w')^2 \\ N_\theta - \frac{\nu}{2}(w')^2 \\ Q_\xi \\ M_\xi \end{vmatrix}; \quad q = \begin{vmatrix} -N_\xi \\ -Q_\xi - N_\xi w' \\ -M_\xi \\ -\dot{u} \\ -\nu\dot{u} \\ -\varkappa^2\dot{w} \\ -\varepsilon^2\dot{\psi} \end{vmatrix}; \quad r = \begin{vmatrix} 0 \\ N_\theta \\ Q_\xi \\ \nu\dot{w} \\ \dot{w} \\ -\varkappa^2\dot{\psi} \\ 0 \end{vmatrix} \tag{19}$$

и n_τ, n_ξ даны по формулам (9).

Подставляя p и q в уравнение (18), получим для рассматриваемой системы следующие соотношения:

$$[N_\xi]+\lambda[\dot{u}]=0,\ \ [Q_\xi+N_\xi w']+\lambda[\dot{w}]=0,\ \ [M_\xi]+\lambda[\varepsilon^2\dot{\psi}]=0,$$

$$[\dot{u}]+\lambda\left[N_\xi-\frac{1}{2}(w')^2\right]=0,\ [\nu\dot{u}]+\lambda\left[N_\theta-\frac{1}{2}\nu(w')^2\right]=0,\ [\varkappa^2\dot{w}]+\lambda[Q_\xi]=0, \tag{20}$$

где λ обозначает на линии разрыва соотношение $\lambda=-\frac{d\xi}{d\tau}=-\frac{n_\tau}{n_\xi}$.

Из четвертого и пятого уравнения системы (20) следует, что

$$[N_\theta]=[\nu N_\xi]. \tag{21}$$

Используя соотношения упругости (3), можно показать, что условия (20) совпадают с условиями (14) и (15).

4. Система (18) является квазилинейной гиперболической и ее можно решать методом Куранта [4], представляя систему (18) в форме

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -w' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & -\nu w' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varkappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w' & 0 & -1 & 0 & -N_\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi}\begin{vmatrix} N_\xi \\ N_\theta \\ Q_\xi \\ M_\xi \\ w' \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial\tau}\begin{vmatrix} N_\xi \\ N_\theta \\ Q_\xi \\ M_\xi \\ w' \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\nu\dot{w} \\ -\dot{w} \\ \varkappa^2\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_\theta \\ -\varepsilon^{-2}Q_\xi \end{vmatrix} \tag{22}$$

Системе (22) можно придать вид

$$A\frac{\partial}{\partial\xi}U+\frac{\partial}{\partial\tau}U=B. \tag{23}$$

Так как система (23) — гиперболическая, то все собственные значения матриц A являются действительными и определяются при помощи уравнения

$$|A-\lambda_i E|=0. \tag{24}$$

Собственные значения получаются следующими:

$$\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_{3,4}=\pm1,\ \lambda_{5,6}=\pm\sqrt{l_1},\ \lambda_{7,8}=\sqrt{l_2}, \tag{25}$$

где

$$l_{1,2}=\frac{1+\varkappa^2+(w')^2+N_\xi}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+\varkappa^2+(w')^2+N_\xi}{2}\right)^2-\varkappa^2-N_\xi}.$$

Характеристики (25) не удается получить из соотношений на линии разрыва (14) и (15). Этим обстоятельством и в рассматриваемом случае уравнений оболочек подтверждается положение, высказанное Р. Курантом [4], что в случае нелинейных уравнений гиперболического типа линии разрывов уже не являются характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнола Л., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. н., **14**, 337 (1965).
2. Лурье И. В., ПММ, **30**, 747 (1966).

3. Love A., Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge, 1934.
4. Курант Р., Уравнения с частными производными. М., 1964.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
9/XII 1969

A. LAHE, L. POVERUS

SILINDRILISE KOORIKU MITTELINEAARSE TELGSÜMMEETRILISE DEFORMATSIOONI KATKEVUSTINGIMUSTEST

Geomeetriliselt mittelineaarsete Timoshenko tüüpi võrrandite abil uuritakse silindrilise kooriku deformatsiooni katkevusi. Katkevustingimuste leidmiseks kasutatakse variatsioonprintsiipi ja säilivusseadusi. Samuti leitakse karakteristlikud suunad, kusjuures ilmneb, et ka kooriku mittelineaarsete hüperboolsete võrrandite kasutamise korral ei ole tugevate katkevuste jooned karakteristikud.

A. LAHE, L. POVERUS

DIE FORSCHUNG DER UNSTETIGKEITSBEDINGUNGEN DER NICHTLINEAREN ACHSENSYMMETRISCHEN DEFORMATIONEN EINER ZYLINDRISCHEN SCHALE

Mit Hilfe der geometrisch nichtlinearen Timoshenko-Gleichungen werden die Unstetigkeiten der Deformation einer zylindrischen Schale erforscht, wobei man das Variationsprinzip und die Erhaltungssätze benutzt. Auch werden Charakteristiken festgestellt, aus denen es deutlich hervorgeht, daß die Linien der starken Unstetigkeiten keine Charakteristiken sind.