

Я. МЕТСАВЭЭР

О РАССЕЯНИИ ВОЛН УПРУГИМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ОБОЛОЧКАМИ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Методом преобразования Ватсона исследуется рассеянная волна давления (эхо) от упругих сферических оболочек. Определены вклады отдельных мод в полное эхо в точке источника, находящегося далеко от оболочки. Показано, что при очень длинных падающих волнах (длина волны более, чем в 8—10 раз превосходит толщину оболочки) среди упругих волн заметный вклад дает только первая симметричная форма колебаний. При более коротких волнах быстро растет влияние первой кососимметричной формы.

Введение

Акустическая волна, рассеянная от упругих сферических оболочек, изучена в ряде работ [1-5], в которых решения получены в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра.

В последнее время опубликован ряд работ, где решения дифракционных задач проводятся методом преобразования Ватсона. Впервые он изложен в [6] для решения задач дифракции электрических волн вокруг Земли. Метод приводит к представлению решений в виде рядов по ползущим волнам, т. е. по собственным волнам, затухающим вдоль поверхности тела.

По сравнению с решениями в виде рядов по полиномам Лежандра, метод преобразования Ватсона в задачах рассеяния акустических волн от упругих объектов позволяет выделить не только часть эха, вызванную упругими явлениями, но и вклады отдельных форм колебаний.

Метод преобразования Ватсона в задачах дифракций акустических волн на цилиндрах и сферах с идеальными граничными условиями хорошо изучен в монографии [7] и в работах [8, 9]. Задаче дифракции акустических волн на упругих цилиндрах посвящены работы [10, 11], а на упругих цилиндрических оболочках — [12]. Настоящая работа является расширением этого метода на случай упругой сферической оболочки, рассматриваемой по теории типа Тимошенко [13].

1. Решение в рядах Фурье

Рассмотрим задачу, где на сферическую упругую оболочку падает сферическая акустическая волна давления, которая в координатах оболочки выражается в виде ряда

$$p_0 = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega t}, \quad (1.1)$$

где

$$a_n = ilx(2n + 1)h_n^{(4)}(kr_0), \quad l = r_0/R, \quad k = \omega/c, \quad x = kR,$$

A_0 — амплитуда, ω — частота колебаний, t — время, r_0 — расстояние от источника до центра оболочки, R — радиус оболочки, r — радиус-вектор, c — скорость звука в среде, $j_n(kr)$, $h_n^{(4)}(kr_0)$ — сферические функции Бесселя и Ханкеля, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра.

Рассеянную от оболочки волну давления рассмотрим в виде

$$p_1 = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_n^{(4)}(kr) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega t}. \quad (1.2)$$

В качестве уравнений, описывающих движение оболочки, примем уравнения теории типа Тимошенко [13]

$$L_{jk} U_k = q_j \quad (j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3), \quad (1.3)$$

где операторы L_{jk} выражаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \nabla^2 + 1 - \nu - \alpha - K_1 \gamma \partial^2 / \partial t^2, & L_{12} &= \alpha - 2a^2 \gamma \partial^2 / \partial t^2, & L_{13} &= 1 + \nu + \alpha, \\ L_{21} &= \alpha - 2a^2 \gamma \partial^2 / \partial t^2, & L_{22} &= a^2 (\nabla^2 + 1 - \nu - K_2 \gamma \partial^2 / \partial t^2) - \alpha, & L_{23} &= -\alpha, \\ L_{31} &= -(1 + \nu + \alpha) \nabla^2, & L_{32} &= \alpha \nabla^2, & L_{33} &= \alpha \nabla^2 - 2(1 + \nu) - K_1 \gamma \partial^2 / \partial t^2 \end{aligned}$$

и где

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 &= 0, & q_3 &= q = -\gamma q_0 h, & \nabla^2 &= \partial^2 / \partial \theta^2 + \cot \theta \partial / \partial \theta, & \gamma &= R^2 / c_1^2, \\ \alpha &= (1 - \nu) k_T / 2, & a^2 &= h^2 / 12 R^2, & c_1^2 &= E / (1 - \nu^2) \rho_1, \\ K_1 &= 1 + a^2, & K_2 &= 1 + 9a^2 / 5, & k_T &= 5/6. \end{aligned}$$

Здесь E , ρ_1 , ν — соответственно модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки, h — толщина оболочки, θ — полярное расстояние, U_k — потенциальные функции перемещений, q — нормальное давление.

Действительные перемещения, т. е. перемещение в плоскости оболочки u , угол поворота ψ и нормальное перемещение w выражаются при этом через потенциальные функции U_k соотношениями:

$$u = \frac{\partial U_1}{\partial \theta}, \quad \psi = \frac{1}{R} \frac{\partial U_2}{\partial \theta}, \quad w = U_3. \quad (1.4)$$

Используя условия контакта на поверхности оболочки ($r = R$)

$$p_0 + p_1 = -q \quad \text{и} \quad \frac{1}{\omega^2 \rho} \left[\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial p_1}{\partial r} \right] = w, \quad (1.5)$$

где ρ — плотность акустической среды, решение задачи можно представить в виде (здесь и далее множитель $\exp(-i\omega t)$ будет опущен)

$$\xi_m = -i A_0 l x \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \lambda_n N^{-1} h_n^{(4)}(kr_0) P_n(\cos \theta). \quad (1.6)$$

В выражении (1.6) через ξ_m ($m = 1, 2, 3$) обозначены все компоненты решения, причем $p_1 = \xi_1$, $q = \xi_2$, $U_k = \xi_3$. Отличающиеся части компонент решения обозначены через λ_m и имеют соответственно вид:

$$\lambda_1 = L h_n^{(4)}(kr), \quad \lambda_2 = -ix D x^{-2} \quad \lambda_3 = i A_{3k} R x^{-2} \rho^{-1} c^{-2}. \quad (1.7)$$

Принятым в (1.6) и (1.7) обозначениям соответствуют:

$$N = xA_{33}h_n^{(1)}(x) - \kappa Dh_n^{(1)'}(x), \quad L = xA_{33}j_n(x) - \kappa Dj_n'(x), \quad (1.8)$$

$D = \det |a_{jk}|$, A_{3k} — его соответствующие адъюнкты, причем

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - \nu - M - \alpha + \beta x^2 K_1, & a_{12} &= \alpha + 2a^2 \beta x^2, & a_{13} &= 1 + \nu + \alpha, \\ a_{21} &= \alpha + 2a^2 \beta x^2, & a_{22} &= a^2(1 - \nu - M + \beta x^2 K_2) - \alpha, & a_{23} &= -\alpha, \\ a_{31} &= (1 + \nu + \alpha)M, & a_{32} &= -\alpha M, & a_{33} &= -\alpha M - 2(1 + \nu) + \beta x^2 K_1, \\ M &= n(n+1), & \beta &= c^2 c_1^{-2}, & \kappa &= hR^{-1} \rho_1 \rho^{-1} c_1^2 c^{-2}. \end{aligned}$$

Если предположить, что источник находится далеко от оболочки, т. е. $r_0 \gg R$, то

$$h_n^{(1)}(kr_0) \approx -il^{-1} x^{-1} e^{i(lx - n\pi/2)} \quad (1.9)$$

и решение (1.6) принимает вид

$$\xi_m = -A_0 e^{ilx} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \lambda_m N^{-1} e^{-in\pi/2} P_n(\cos \theta). \quad (1.10)$$

Решение вида (1.10) является исходным при дальнейшем использовании преобразования Ватсона.

2. Преобразование Ватсона

Преобразование Ватсона основывается на соотношении [7]

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2} i \int_{\Gamma} f_{\mu}(x) \sin^{-1}(\mu\pi) P_{\mu}(-\cos \theta) d\mu. \quad (2.1)$$

Используя (2.1), решению (1.10) можно придать вид

$$\xi_m = -\frac{1}{2} i A_0 e^{ilx} \int_{\Gamma} \frac{2\mu+1}{\sin \mu\pi} \frac{\lambda_m}{N} e^{-i\mu\pi/2} P_{\mu}(-\cos \theta) d\mu. \quad (2.2)$$

Контур интегрирования Γ на комплексной плоскости μ охватывает здесь положительную часть вещественной оси по часовой стрелке.

В работах [7, 11] показано, что вычисление этих интегралов приводит к суммам вычетов в полюсах μ_s , находящихся в первой четверти плоскости μ . Уравнение полюса $N=0$, где $N=N(\mu, x)$ задано соотношением (1.8), имеет бесконечное число решений и, соответственно, получаемые ряды оказываются тоже бесконечными. Преимущество этих рядов состоит в том, что в области геометрической тени они быстро сходятся [7].

Решение в области геометрической тени имеет вид

$$\xi_m = A_0 \pi e^{ilx} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{2\mu_s+1}{\sin \mu_s \pi} \frac{\lambda_m}{\partial N / \partial \mu} e^{-i\mu_s \pi/2} P_{\mu_s}(-\cos \theta) \right]_{\mu=\mu_s}, \quad (2.3)$$

причем каждый член ряда соответствует одной ползушей волне.

В случае, если точка наблюдения находится вне области геометрической тени, медленно сходящуюся часть решения можно выделить подстановкой [7]

$$P_{\mu}(-\cos \theta) = e^{i\mu\pi} P_{\mu}(\cos \theta) - 2iR_{\mu}(\cos \theta) \sin \mu\pi. \quad (2.4)$$

Здесь

$$R_{\mu}(\cos \theta) = \frac{1}{2} [P_{\mu}(\cos \theta) - 2iQ_{\mu}(\cos \theta)/\pi],$$

а $Q_{\mu}(\cos \theta)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода.

(8) После подстановки (2.4) в решение (2.2) последнее разлагается на две части

$$\xi_m = \xi_{mr} + \xi_{mg}. \quad (2.5)$$

Первое слагаемое связано с излучением и имеет вид

$$\xi_{mr} = -i \frac{A_0}{2} e^{i\lambda x} \int_{\Gamma} \frac{2\mu + 1}{\sin \mu \pi} \frac{\lambda_m}{N} e^{i\mu\pi/2} P_{\mu}(\cos \theta) d\mu. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое связано с отраженной волной давления

$$\xi_{mg} = -A_0 e^{i\lambda x} \int_{\Gamma} (2\mu + 1) \lambda_m N^{-1} e^{-i\mu\pi/2} R_{\mu}(\cos \theta) d\mu. \quad (2.7)$$

Интегралы, связанные с излучением (2.6), можно вычислить как суммы вычетов в полюсах μ_s

$$\xi_{mr} = A_0 \pi e^{i\lambda x} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{2\mu + 1}{\sin \mu \pi} \frac{\lambda_m}{\partial N / \partial \mu} e^{i\mu\pi/2} P_{\mu}(\cos \theta) \right]_{\mu=\mu_s}. \quad (2.8)$$

Если точка наблюдения находится там же, где источник, то, учитывая соотношения (1.9) и что $P_{\mu}(1) = 1$, излученная волна давления в виде суммы ползущих волн выразится так

$$p_r = \frac{A_0}{2l} e^{2i\lambda x} \left\{ -i \frac{2\pi}{x} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{2\mu + 1}{\sin \mu \pi} \frac{L}{\partial N / \partial \mu} \right]_{\mu=\mu_s} \right\}. \quad (2.9)$$

Интегралы, связанные с отражением (2.7) удобно вычислить методом перевала [7, 11].

Учитывая соотношения $j_{\mu}(x) = 1/2 [h_{\mu}^{(1)}(x) + h_{\mu}^{(2)}(x)]$ и (1.9), выражению отраженной волны давления (2.7) в точке, находящейся далеко от оболочки, можно придать следующий вид:

$$p_g = \frac{iA_0 R}{2rx} e^{ix(l+r/R)} \int_{\Gamma} \frac{2\mu + 1}{e^{i\mu\pi}} \left[1 + \frac{x A_{33} h_{\mu}^{(2)}(x) - \kappa D h_{\mu}^{(2)'}(x)}{x A_{33} h_{\mu}^{(1)}(x) - \kappa D h_{\mu}^{(1)'}(x)} \right] R_{\mu}(\cos \theta) d\mu. \quad (2.10)$$

В дальнейшем единица в квадратных скобках (2.10) будет опущена, так как она не связана с отражением.

Интегрирование можно провести по новому параметру $z = (\mu + 1/2)x^{-1}$, если применить асимптотические выражения

$$h_{\mu}^{(1)}(x) \approx e^{i\tau} Qx, \quad h_{\mu}^{(2)}(x) \approx e^{-i\sigma} Qx,$$

где

$$\sigma = x[\sqrt{1 - z^2} - z \arccos(z)] - \pi/4, \quad Q = (1 - z^2)^{1/4},$$

и выражение

$$R_{\mu}(\cos \theta) \approx \eta e^{i(zx\theta - \pi/4)}, \quad \eta = (2\pi\mu \sin \theta)^{-1/2},$$

справедливое в диапазоне

$$0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, \quad |\mu| \gg \varepsilon^{-1}.$$

Выражения, связанные с отраженной волной (2.7), с учетом (2.10) имеют теперь вид

$$p_g = -A_0 R r^{-1} x e^{i[x(l+r/R) + \pi/4]} \int_{\Gamma} \eta z F_p F_0^{-1} e^{ix\varphi_1} dz, \\ \xi_{2g, 3g} = -2A_0 x^3 e^{i[\lambda x + \pi/4]} \int_{\Gamma} Q \eta z \lambda_{2,3} F_0^{-1} e^{ix\varphi_2} dz, \quad (2.11)$$

где

$$F_p = xA_{33} - \chi Dh_{\mu}^{(2)'}(x)/h_{\mu}^{(2)}(x), \quad F_0 = xA_{33} - \chi Dh_{\mu}^{(4)'}(x)/h_{\mu}^{(4)}(x) \quad (2.12)$$

и

$$\varphi_1 = 2z \arccos z - 2\sqrt{1-z^2} - z(\pi - \theta),$$

$$\varphi_2 = z \arccos z - \sqrt{1-z^2} - z(\pi/2 - \theta).$$

Интегралы (2.11) вычисляются методом стационарной фазы. Координатами седловых точек являются $z_{s1} = \sin(\theta/2)$ и $z_{s2} = \sin \theta$. После интегрирования получаем

$$p_g = -\frac{1}{2}A_0 R r^{-1} e^{ix[l+r/R-2 \cos(\theta/2)]} [\chi F_p F_0^{-1}]_{\mu=x \sin(\theta/2)^{-1/2}},$$

$$\xi_{2g, 3g} = -2A_0 x^2 \cos \theta e^{ix(l-\cos \theta)} [\chi \lambda_{2,3} F_0^{-1}]_{\mu=x \sin \theta^{-1/2}},$$

$$\chi = \sqrt{(\mu + 1/2)/\mu}.$$

Решение (2.13) негодно при малых углах θ . Но если в выражениях (2.13) множитель χ принять равным единице, хотя это оправдано только при высоких частотах и для не очень малых углов, то получаемые выражения являются конечными и при малых углах.

Если точка наблюдения находится там же, где источник, то

$$p_g = -\frac{1}{2}A_0 l^{-1} e^{2ilx} e^{-2ix} [F_p F_0^{-1}]_{\mu=-1/2}. \quad (2.14)$$

Отношение F_p/F_0 учитывает отличия краевого условия от условия Дирихле.

3. Численные результаты

Численные результаты согласно формулам (2.9), (2.14) были получены для рассеянной волны давления от алюминиевой ($E = 6,76 \times 10^5$ кг/см², $\nu = 0,355$, $\rho_1 = 2,7$ г/см³) оболочки толщиной $h/R = 0,05$ в воде. Значения функций Ханкеля первого и второго рода с комплексными индексами были получены численным интегрированием на комплексной плоскости индекса μ при помощи интегрального вида Зоммерфельда этих функций [14].

На рис. 1 представлено качественное расположение четырех первых полюсов ($\mu_1 = 4,690 + 0,061 i$, $\mu_2 = 23,290 + 0,078 i$, $\mu_3 = 18,488 + 4,101 i$, $\mu_4 = 22,603 + 5,963 i$) при $x = 20$ и часть деформированного контура интегрирования. Два первых полюса, которые соответствуют первой симметричной и первой кососимметричной относительно срединной поверхности оболочки формам колебаний, обладают существенно меньшей мнимой частью, чем другие. Но так как мнимая часть связана с затуханием (излучение в среду), то эти два первых полюса дают существенно больший вклад в общее эхо, чем другие полюса.

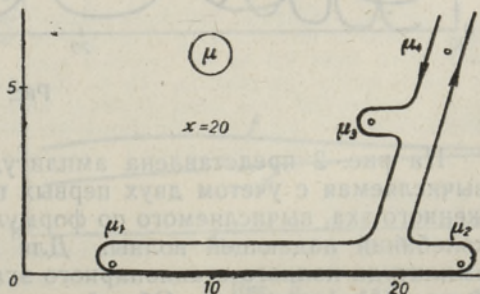


Рис. 1.

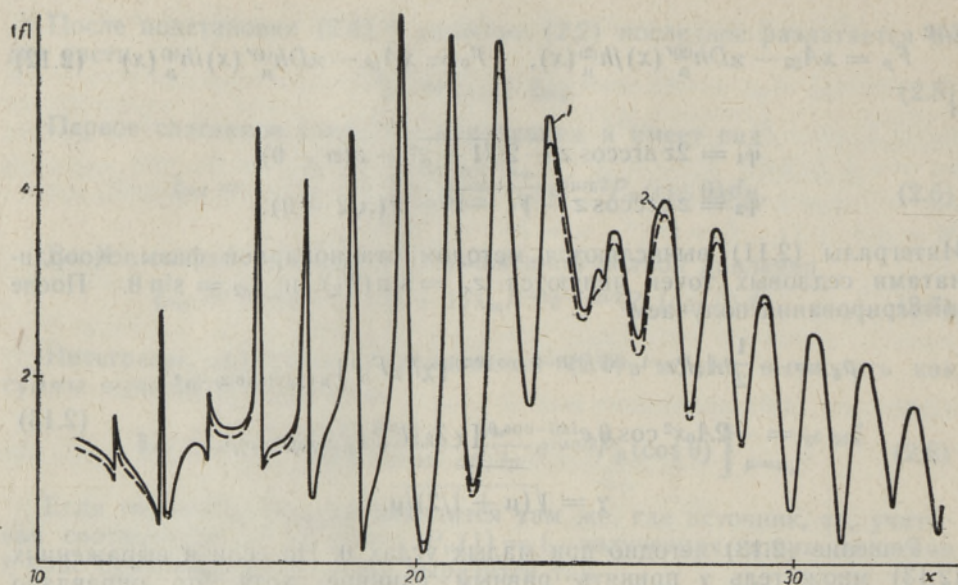


Рис. 2.

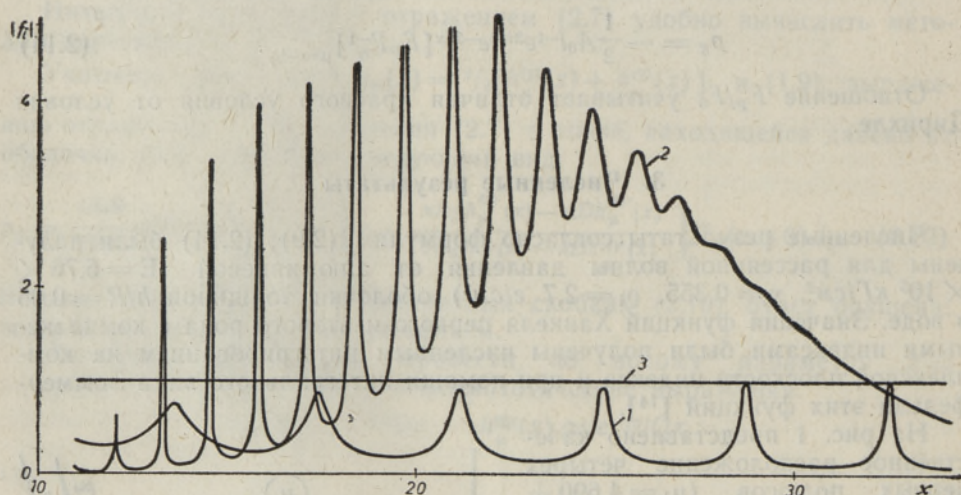


Рис. 3.

На рис. 2 представлена амплитуда стационарного эха (кривая 1), вычисляемая с учетом двух первых полюсов по формуле (2.9), и отраженного эха, вычисляемого по формуле (2.14), в зависимости от частоты колебаний падающей волны. Для сравнения приведена (до $x=30$) амплитуда полного стационарного эха, полученная суммированием ряда Фурье [5] (кривая 2). Общий множитель $\frac{1}{2}(A_0/l)\exp(2ilx)$ везде опущен.

На рис. 3, 4 представлены вклады отдельных мод в полное стационарное эхо. На рис. 3 показаны амплитуды ($|f_i|$), а на рис. 4 — производные фазы ($d[\arg(f_i)]/dx$), причем кривые 1, 2 соответствуют двум первым полюсам, а кривая 3 — отраженной волне давления. На основе

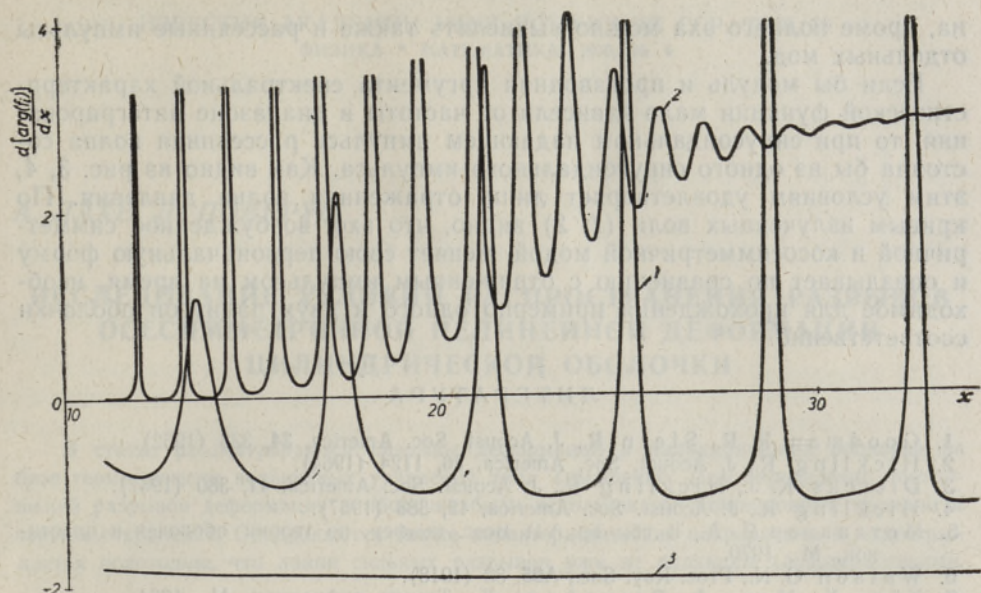


Рис. 4.

полученных результатов можно прийти к выводу, что если длина падающей волны давления более чем в 8—10 раз превосходит толщину оболочки, то вызванное упругими силами эхо от алюминиевой сферической оболочки передается практически только первой симметричной модой. При уменьшении длины падающей волны быстро растет влияние первой кососимметричной формы колебания, и если длина волны составляет примерно 5 толщин оболочки, то вклад кососимметричной моды в полное эхо является господствующим. Далее при уменьшении длины волны вклад первой кососимметричной моды опять уменьшается.

На рис. 5 представлены отношения фазовых (c_i^f) и групповых (c_i^g) скоростей к скорости звука в среде (c) в зависимости от частоты колебания. Кривые 1, 3 соответствуют фазовым, а кривые 2, 4 — групповым скоростям первой симметричной и первой кососимметричной форм колебаний. Отношения скоростей вычислены по формулам [11]

$$\frac{c_i^f}{c} = \frac{x}{\text{Re}(\mu_i) + 1/2},$$

$$\frac{c_i^g}{c} = \frac{dx}{d[\text{Re}(\mu_i)]}.$$

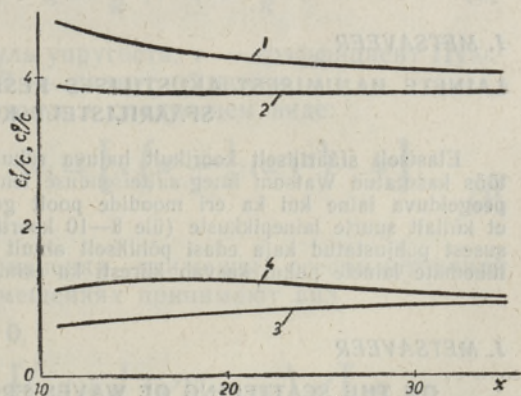


Рис. 5.

Стационарное эхо, вычисленное методом преобразования Ватсона, также как и эхо, вычисленное в рядах Фурье, можно трактовать как спектральную характеристическую функцию в методе преобразования Фурье по времени. Но методом, основанным на преобразовании Ватсо-

на, кроме полного эха можно вычислять также и рассеянные импульсы отдельных мод.

Если бы модуль и производная аргумента спектральной характеристической функции мало зависели от частоты в диапазоне интегрирования, то при синусоидальном падающем импульсе рассеянная волна состояла бы из одного синусоидального импульса. Как видно из рис. 3, 4, этим условиям удовлетворяет лишь отраженная волна давления. По кривым излученных волн (1, 2) видно, что эхо, возбужденное симметричной и кососимметричной модой, меняет свою первоначальную форму и опаздывает по сравнению с отраженным импульсом на время, необходимое для прохождения примерно одного и двух радиусов оболочки соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goodman R. R., Stern R., J. Acoust. Soc. America, 34, 338 (1962).
2. Hickling R., J. Acoust. Soc. America, 36, 1124 (1964).
3. Diercks K. J., Hickling R., J. Acoust. Soc. America, 41, 380 (1967).
4. Hickling R., J. Acoust. Soc. America, 42, 388 (1967).
5. Метсавээр Я. А., В сб.: Тр. VII Всес. конфер. по теории оболочек и пластинок, М., 1970.
6. Watson G. N., Proc. Roy. Soc., A95, 83 (1918).
7. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, М., 1964.
8. Uberall H., Doolittle R. D., McNicholas J. V., J. Acoust. Soc. America, 39, 564 (1966).
9. McNicholas J. V., Uberall H., Choate K., J. Acoust. Soc. America, 44, 752 (1968).
10. Doolittle R. D., McNicholas J. V., Uberall H., J. Acoust. Soc. America, 42, 522 (1967).
11. Doolittle R. D., Uberall H., Uginčius P., J. Acoust. Soc. America, 43, 1 (1968).
12. Uginčius P., Uberall H., J. Acoust. Soc. America, 43, 1025 (1968).
13. Jahanshahi A., J. Acoust. Soc. America, 38, 883 (1965).
14. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. I, М., 1949.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/III 1970

J. METSAVEER

LAINETE HAJUMISEST AKUSTILISES KESKKONNAS OLEVATELT ELASTSETELT SFÄÄRILISTELT KOORIKUTELT

Elastset sfääriliselt koorikult hajuva rõhulaine (kaja) arvutamiseks on käesolevas töös kasutatud Watsoni integ.aalteisenduse tehnikat, mis võimaldab arvutada eraldi nii peegelduva laine kui ka eri moodide poolt genereeritud kiirguvad lained. Näidatakse, et küllalt suurte lainepikkuste (üle 8—10 kooriku paksuse) puhul antakse kooriku elastisusest põhjustatud kaja edasi põhiliselt ainult esimese sümmeetrilise moodi abil. Veidi lühemate lainete puhul kasvab kiiresti ka esimese antisümmeetrilise moodi mõju.

J. METSAVEER

ON THE SCATTERING OF WAVES FROM SPHERICAL SHELLS IN AN ACOUSTIC MEDIUM

The Watson's integral transform technique is used for computing echoes from spherical shells. This method makes possible to compute separately a reflected wave as well as radiated waves generated by particular modes.

For sufficiently great wavelengths (more than 8—10 thicknesses of shell) the echo caused by elastic waves in the shell is transmitted mainly by the first symmetric mode. In the case of shorter wavelengths, the effect of the first antisymmetric mode increases rapidly.