EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4
https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.04

*М. ЛЕВИН*

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ

Пусть $1 < q \leqslant \infty$ и $W^{(2r)}_{01L_q}$ — множество функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно-непрерывную производную порядка $2r-1$ и удовлетворяют условиям:

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1), \tag{1}$$

$$\{\int\limits_0^1 |f^{(2r)}(x)|^q\,dx\}^{1/q} \leqslant M. \tag{2}$$

Для рассматриваемого множества функций решим задачу [1] построения наилучшей квадратурной формулы среди формул вида

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2r-2} \mu_k^{(j)} f^{(j)}(x_k) + R_n(f). \tag{3}$$

Другими словами, мы найдем значения $x_k$ и $\mu_k^{(j)}$ $(k=1,\ \ldots,\ n;$ $j=0,\ \ldots,\ 2r-2)$ такие, чтобы величина

$$R_n = \sup_{f\in W^{(2r)}_{01L_q}} |R_n(f)|$$

приняла наименьшее значение.

Через $G(x,t)$ обозначим функцию Грина оператора

$$\begin{cases} y^{(2r)}(x), & (4)\\ y^{(k)}(0)=y^{(k)}(1)=0 \quad (k=0,\ \ldots,\ r-1), & (5)\end{cases}$$

а через $H(x,t)$ — многочлен степени $2r-1$ по $x$ и степени $2r-1$ по $t$, удовлетворяющий условиям:

$$H^{(k)}_{x^k}(0,t)\equiv 0, \qquad H^{(k)}_{x^k}(1,t)\equiv \frac{(1-t)^{2r-1-k}}{(2r-1-k)!}$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Воспользовавшись интерполяционным многочленом Эрмита для кратных узлов $x=0$ и $x=1$, получим

$$H(x,t)=\frac{x^r(1-t)^r}{(2r-1)!}\,Q(x,t),$$

где

$$Q(x,t)=\sum_{l=0}^{r-1} C_{2r-1}^{l}(1-t)^{r-1-l}\sum_{k=0}^{r-1-l}(-1)^k C_{r+k-1}^{k}(x-1)^{k+l}.$$

Легко проверить [2], что

$$G(x,t)=\frac{(x-t)^{2r-1}E(x-t)}{(2r-1)!}-H(x,t), \tag{6}$$

где

$$E(x-t)=\begin{cases}1, \text{ если } x>t;\\ 0, \text{ если } x\leqslant t.\end{cases}$$

Отметим некоторые свойства функции $G(x,t)$.

Так как оператор (4)—(5) самосопряженный, то $G(x,t)=G(t,x)$. Отсюда, а также из того, что для $x\leqslant t$ имеет место равенство $G(x,t)=-H(x,t)$, мы для $x>t$ получаем, что $G(x,t)=-H(t,x)$ и поэтому

$$G(x,t)=-H(x,t)E(t-x)-H(t,x)E(x-t) \quad (t\neq x). \tag{7}$$

Из свойств функции Грина следует, что $\int\limits_0^1 G(x,t)\,dx$ как функция от $t$ удовлетворяет условиям (5), поэтому

$$\int\limits_0^1 G(x,t)\,dx=At^r(t-1)^r,$$

откуда

$$\frac{d^{2r}}{dt^{2r}}\int\limits_0^1 G(x,t)\,dx=A\cdot(2r)!$$

Левая часть последнего равенства равна 1 (это получится, если выписать решение задачи $y^{(2r)}=1$ при условиях (5)), поэтому $A=1/(2r)!$ и

$$\int\limits_0^1 G(x,t)\,dx=\frac{t^r(t-1)^r}{(2r)!}. \tag{8}$$

Сделав в выражении (4)—(5) замену $x=1-z$, легко обнаружим, что

$$G(x,t)=G(1-x,1-t). \tag{9}$$

Учитывая определение функции $G(x,t)$ для функций из множества $W^{(2r)}_{01L_q}$ имеем следующее представление:

$$f(x)=\int\limits_0^1 f^{(2r)}(t)\,G(x,t)\,dt. \tag{10}$$

Подставив (10) в (3), учтя (8) и воспользовавшись неравенством Гельдера, получим

$$|R_n(f)|\leqslant\frac{M}{(2r)!}\left\{\int\limits_0^1|K(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right), \tag{11}$$

где

$$K(t)=t^r(t-1)^r-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2r-2}(2r)!\,\mu_k^{(j)}G_{x^j}^{(j)}(x_k,t).$$

Так как для функции

$$f(x)=\frac{M}{(2r)!}\{\int_0^1|K(t)|^p dt\}^{-1/q}\cdot\int_0^1|K(t)|^{p/q}\operatorname{sign}K(t)\,G(x,t)\,dt$$

неравенство (11) превращается в равенство, то тем самым

$$R_n=\frac{M}{(2r)!}U^{1/p}, \tag{12}$$

где

$$U=\int_0^1|K(t)|^p dt. \tag{13}$$

Таким образом нахождение наилучшей формулы (3) для множества $W^{(2r)}_{01L_q}$ сводится к минимизации величины (13) по переменным $x_k$, $\mu_k^{(j)}$ ($k=1, \ldots, n$; $j=0, \ldots, 2r-2$).

Для решения этой задачи введем в рассмотрение функцию $L(t)$, которую определим следующим образом:

1°. На отрезке $[0, x_1]$

$$L(t)=x_1^{2r}S_{2r,p}\left(\frac{t}{x_1}\right),$$

где $S_{2r,p}(t)$ есть многочлен вида $t^{2r}+b_1t^{2r-1}+\ldots+b_rt^r$, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике $L_p$.

2°. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1})$ $(i=1, \ldots, n-1)$

$$L(t)=h_i^{2r}R_{2r,p}\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right),$$

где $R_{2r,p}(t)$ — многочлен степени $2r$ со старшим коэффициентом, равным 1, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в метрике $L_p$; $h_i=0{,}5(x_{i+1}-x_i)$; $a_i=0{,}5(x_{i+1}+x_i)$.

3°. На отрезке $[x_n, 1]$

$$L(t)=(1-x_n)^{2r}S_{2r,p}\left(\frac{1-t}{1-x_n}\right).$$

Обозначим через $x_k^*$ те значения $x_k$ $(k=1, \ldots, n)$, для которых величина $\int_0^1|L(t)|^p dt$ принимает наименьшее значение. Соответствующую этим узлам функцию $L(t)$ обозначим через $L^*(t)$.

Найдем значения $x_k^*$ $(k=1, \ldots, n)$.

Имеет место формула [3]

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}|L(t)|^p dt=\frac{[R_{2r,p}(1)]^p}{(2rp+1)2^{2rp}}(x_{i+1}-x_i)^{2rp+1}. \tag{14}$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось в [3] при выводе (14), мы придем к равенствам*:

$$\int_0^{x_1}|L(t)|^p dt=\frac{x_1^{2rp+1}}{2rp+1}[S_{2r,p}(1)]^p,$$

* То, что $S_{2r,p}(1)>0$ доказывается так же, как и неравенство $R_{2r,p}(1)>0$ в [1].

$$\int\limits_{x_n}^{1} |L(t)|^p dt = \frac{(1-x_n)^{2rp+1}}{2rp+1} [S_{2r,p}(1)]^p.$$

Но тогда

$$\int\limits_{0}^{1} |L(t)|^p dt = \frac{x_1^{2rp+1} + (1-x_n)^{2rp+1}}{2rp+1} [S_{2r,p}(1)]^p + \\ + \frac{[R_{2r,p}(1)]^p}{(2rp+1)2^{2rp}} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)^{2rp+1}. \tag{15}$$

Минимизация правой части (15) по переменным $x_k$ $(k=1, \ldots, n)$ по аналогии с [4] (см. с. 222—224) приводит нас к значениям

$$x^*_k = [2(k-1)+\delta]h \quad (k=1, \ldots, n), \tag{16}$$

где

$$\delta = [R_{2r,p}(1)/S_{2r,p}(1)]^{1/2r},$$
$$h = 0{,}5[n-1+\delta]^{-1}.$$

Теперь рассмотрим функцию $K(t)$ на каждом из участков $[x_i, x_{i+1})$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, $x_0=0$, $x_{n+1}=1$. При этом учтем, что согласно (6), (9), если на $[0, x_1]$ функция $K(t)=\varphi(t, \{x_k\})$, то на $[x_n, 1]$ функция $K(t)=\varphi(1-t, \{1-x_k\})$. Тогда, имея в виду характер выбора функций $L(t)$ и $L^*(t)$, придем к неравенству

$$\int\limits_0^1 |K(t)|^p dt \geqslant \int\limits_0^1 |L^*(t)|^p dt. \tag{17}$$

Пусть теперь узлы формулы (3) есть числа (16). Покажем, что тогда можно выбрать веса $\mu_k^{(j)}$ так, что на отрезке $[0, 1]$ функция $K(t)$ совпадает с функцией $L^*(t)$. Тогда из (17) будет следовать, что выбранные веса и узлы решают задачу построения наилучшей формулы (3).

Функция $L^*(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, в чем легко убедиться проверкой равенств

$$L^*(x^*_k-0) = L^*(x^*_k+0) \quad (k=1, 2, \ldots, n)^{**}$$

Так как $G(x,t)=G(t,x)$, то из (6) имеем, что для $t \in [x^*_i, x^*_{i+1}]$ и $l=0, 1, \ldots, 2r-2$

$$H^{(l)}_{x^l}(x^*_i, t) - H^{(l)}_{x^l}(t, x^*_i) = (-1)^{l+1} \frac{(t-x^*_i)^{2r-1-l}}{(2r-1-l)!}.$$

Учитывая это и (7), по аналогии с [1, 3] найдем разности аналитических выражений для $K(t)$ на соседних участках $[x^*_i, x^*_{i+1}]$ и $[x^*_{i+1}, x^*_{i+2}]$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$. Эти разности приравняем соответствующим разностям аналитических выражений для функции $L^*(t)$, что даст систему уравнений для определения весов $\mu_k^{(j)}$:

$$\sum_{j=0}^{2r-2} (-1)^j \mu_1^{(j)} (2r)! \frac{(t-x^*_1)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!} = x_1^{*2r} S_{2r,p}\left(\frac{t}{x^*_1}\right) - h^{2r} R_{2r,p}\left(\frac{t-a^*_1}{h}\right),$$

** При этом надо будет учесть, что [1] $R_{2r,p}(1) = R_{2r,p}(-1)$.

$$\sum_{j=0}^{2r-2}(-1)^j\mu_k^{(j)}(2r)!\,\frac{(t-x_k^*)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}=h^{2r}\left[R_{2r,p}\left(\frac{t-a_{k-1}^*}{h}\right)-R_{2r,p}\left(\frac{t-a_k^*}{h}\right)\right]$$

$$(k=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1),$$

$$\sum_{j=0}^{2r-2}(-1)^j\mu_n^{(j)}(2r)!\,\frac{(t-x_n^*)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}=$$

$$=h^{2r}R_{2r,p}\left(\frac{t-a_{n-1}^*}{h}\right)-(1-x_n^*)^{2r}S_{2r,p}\left(\frac{1-t}{1-x_n^*}\right),$$

где $a_k^*=0{,}5(x_{k+1}^*+x_k^*)$.

Если здесь в соответствующих равенствах правые части разложить по степеням $t-x_k^*$, то это даст

$$\begin{cases}\mu_1^{(j)}=\dfrac{1}{(2r)!}\left[h^{j+1}R_{2r,p}^{(2r-j-1)}(1)+(-1)^jx_1^{*j+1}S_{2r,p}^{(2r-j-1)}(1)\right],\\ \mu_n^{(j)}=(-1)^j\mu_1^{(j)},\\ \mu_k^{(j)}=\dfrac{2h^{j+1}}{(2r)!}R_{2r,p}^{(2r-1-j)}(1)\cdot\nu_j\\ (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ 2r-2),\end{cases}\tag{18}$$

где

$$\nu_j=\begin{cases}0, & j \text{ — нечетное},\\ 1, & j \text{ — четное},\end{cases}$$

и учтено, что [1] $R_{2r,p}^{(j)}(-1)=(-1)^jR_{2r,p}^{(j)}(1)$.

Пусть теперь в формуле (3) узлы и веса есть числа (16) и (18). Покажем, что тогда $K(t)=L^*(t)$ на отрезке $[0,1]$. Обозначим аналитические выражения для $K(t)$ и $L^*(t)$ на $[0,x_1]$ через $x^rp_r(t)$ и $x^rq_r(t)$, где $p_r(t)$ и $q_r(t)$ — многочлены степени $r$ со старшим коэффициентом, равным 1. Тогда в силу выбора (18) для отрезков $[x_i^*,\ x_{i+1}^*]$ имеем

$$\begin{cases}K(t)=x^rp_r(t)+\displaystyle\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{2r-2}(-1)^j\mu_k^{(j)}(2r)!\,\frac{(t-x_k^*)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!},\\ L^*(t)=x^rq_r(t)+\displaystyle\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{2r-2}(-1)^j\mu_k^{(j)}(2r)!\,\frac{(t-x_k^*)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}.\end{cases}\tag{19}$$

Но отсюда, а также из того, что $K^{(l)}(1)=L^{*(l)}(1)$ $(l=0,1,\ldots,r-1)$, следует равенство $p_r(t)=q_r(t)$, откуда, в свою очередь, учитывая (19), получаем, что $K(t)=L^*(t)$ на $[0,1]$.

Поэтому, в силу выясненного выше, узлы (16) и веса (18) определяют наилучшую формулу (3) для рассматриваемого множества функций.

Учитывая это, мы по (12), (17), (15) и (16) получаем, что для наилучшей формулы

$$R_n=\frac{MR_{2r,p}(1)}{(2r)!\sqrt[p]{2rp+1}}h^{2r}.\tag{20}$$

Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Для множества* $W^{(2r)}_{01L_q}$ $(1 < q \leqslant \infty)$ *единственной наилучшей формулой вида* (3) *является та формула* (3), *у которой узлы вычислены по* (16), *веса — по* (18). *Точная оценка ошибки этой формулы дается числом* (20).

Через $W^{(2r)}_{L_q}$ обозначим множество функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно-непрерывную производную порядка $2r-1$ и удовлетворяют условию (2).

Для функций этого множества рассмотрим формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{2(r-1)} \mu_k^{(j)} f^{(j)}(x_k) + \sum_{j=0}^{r-1} [\gamma_j f^{(j)}(0) + \delta_j f^{(j)}(1)] + \bar{R}_n(f). \quad (21)$$

Обозначим через $R_n[x^m]$ ошибку формулы (3) с узлами (16) и весами (18) для функции $f(x) = x^m$.

Пусть числа

$$\gamma^*_j,\ \delta^*_j \quad (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1) \quad (22)$$

есть решение системы уравнений ***

$$\begin{cases} \gamma_m + \sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} = \dfrac{1}{m!} R_n[x^m] \\ (m = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1), \\ \sum\limits_{j=0}^{r-1} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} = \dfrac{1}{m!} R_n[x^m] \\ (m = r,\ r+1,\ \ldots,\ 2r-1). \end{cases}$$

Тогда формула (21) с узлами (16) и весами (18) и (22) точна для любого многочлена степени $2r-1$. Используя это, рассуждениями, приведенными в [5, 6], приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Для множества* $W^{(2r)}_{L_q}$ $(1 < q \leqslant \infty)$ *единственной наилучшей формулой вида* (21) *является та формула* (21), *у которой узлы вычислены по* (16), *а веса есть числа* (18) *и* (22). *Точная оценка ошибки этой формулы имеет вид* (20).

При доказательстве теоремы 2 мы рассматривали только те формулы (21), которые точны для многочленов степени $2r-1$, остальные формулы мы вправе были исключить из рассмотрения, так как на множестве $W^{(2r)}_{L_q}$ для них $\sup|\bar{R}_n(f)| = \infty$.

Пусть $z_k \in [0, 1]$; $a_{ij}^{(k)}$, $c_j$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu;\ i = 0, 1, \ldots, m_k - 1;\ j = 0, 1, \ldots, 2r-1)$ — заданные числа; $m_0 + m_1 + \ldots + m_\nu = 2r$; $\pi_{2r-1}(x)$ — многочлен степени $2r-1$, удовлетворяющий условиям $Q_j(\pi_{2r-1}) = c_j$ $(j = 0, 1, \ldots, 2r-1)$, где

$$Q_j(f) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{m_k-1} a_{ij}^{(k)} f^{(i)}(z_k) \qquad (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2r-1).$$

*** Определитель системы отличен от нуля.

Через $W^{(2r)}_{QL_q}$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно-непрерывную производную порядка $2r-1$, удовлетворяют условию (2) и условиям

$$Q_j(f)=c_j \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ 2r-1).$$

Теорема 3. *Для множества* $W^{(2r)}_{QL_q}$ $(1<q\leqslant\infty)$ *наилучшей формулой* (21), *точной для многочленов степени* $2r-1$, *является формула, построенная в теореме* 2, *с точной оценкой* (20).

Доказательство. Пусть формула (21) точна для многочленов степени $2r-1$, $f(x)\in W^{(2r)}_{QL_q}$ и $s(x)$ — многочлен степени $2r-1$, удовлетворяющий условиям

$$s^{(i)}(0)=f^{(i)}(0),\quad s^{(i)}(1)=f^{(i)}(1)\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Тогда для $\varphi=(f-s)\in W^{(2r)}_{01L_q}$ имеем $\bar{R}_n(\varphi)=\bar{R}_n(f)$. С другой стороны, если $\psi\in W^{(2r)}_{01L_q}$, а $t(x)$ — многочлен степени $2r-1$, удовлетворяющий условиям

$$t^{(i_k)}(z_k)=\psi^{(i_k)}(z_k)\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu;\ i_k=0,\ 1,\ \ldots,\ m_k-1),$$

то $f_0=(\psi-t+\pi_{2r-1})\in W^{(2r)}_{QL_q}$ и $\bar{R}_n(f_0)=\bar{R}_n(\psi)$.

Но тогда

$$\sup_{f\in W^{(2r)}_{QL_q}}|\bar{R}_n(f)|=\sup_{f\in W^{(2r)}_{01L_q}}|\bar{R}_n(f)|,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Отметим, что задачи, решенные в настоящей работе близки к задачам, рассмотренным в [1, 3, 7, 8].

Данная работа обобщает результаты, полученные в [5, 9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.
3. Аксень М. Б., Турецкий А. Х., Изв. АН БССР, Сер. физ.-матем. н., № 1, 15 (1966).
4. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.
5. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 249 (1969).
6. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 142 (1970).
7. Доронин Г. Я., Сб. научн. тр. Днепропетр. инж.-стр. ин-та, № 1—2, 210 (1955).
8. Алиев Р. М., Наилучшие квадратурные и кубатурные формулы для некоторых классов функций. Диссертация, Азербайджанск. политехн. ин-т, Баку, 1965.
9. Шац Е., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, **293**, 27 (1970).

*Таллинский политехнический институт*

Поступила в редакцию
24/III 1970

*M. LEVIN*

**KVADRATUURVALEMITE EKSTREEMUMÜLESANDED MÕNEDE FUNKTSIOONIHULKADE JAOKS**

Hulga $W^{(2r)}_{01L_q}$ $(1 < q \leqslant \infty)$ (vt. tingimused (1), (2)) jaoks tuletatakse parim valem (3), hulgale $W^{(2r)}_{L_q}$ — parim valem (21).

*M. LEVIN*

**THE EXTREMAL PROBLEM FOR THE QUADRATURE FORMULAE FOR SOME CLASSES OF FUNCTIONS**

For the functions of class $W^{(2r)}_{01L_q}$ (see conditions (1), (2)) the best formula (3) has been constructed and for the functions of class $W^{(2r)}_{L_q}$ the best formula (21); $1 < q \leqslant \infty$.