$$Q_r(z) = \frac{\sin(r+1)\arccos z}{2^r\sqrt{1-z^2}},$$

$$P_r(z) = \frac{r!}{(2r)!}[z^r(z-1)^r]^{(r)}.$$

Учитывая это, получаем оценки ошибки

$$R_{mn}^{(1)} = \frac{M}{m!n!4^{m+n}},$$

$$R_{mn}^{(2)} = \frac{n!m!M}{(2n)!(2m)!\sqrt{(2n+1)(2m+1)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сюй Л. С., Сообщ. АН ГрузССР, **29**, 521 (1962).
2. L. C. Hsu, Acta Mathem. Acad. Sci. Hung., **13**, 387 (1962).
3. L. C. Hsu, Acta Mathem. Acad. Sci. Hung., **14**, 359 (1963).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. наук, **12**, 44 (1963).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
10/VI 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.4.14

М. ЛЕВИН

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

M. LEVIN. ÜHEST EKSTREMAALÜLESANDEST

M. LEVIN. ON ONE EXTREME PROBLEM

Пусть $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — неотрицательные интегрируемые на отрезке $[-1, 1]$ функции, $q_r(x)$ — произвольный многочлен степени r со старшим коэффициентом, равным единице, $p \geqslant 1$.

Через

$$q_r^{(\alpha_j, p)}(x) = x^r + \sum_{i=0}^{r-1} c_i(\alpha_j, p, r)x^i$$

обозначаем многочлен вида $q_r(x)$ такой, что

$$\min_{q_r}\int_{-1}^{1}\alpha_j(x)|q_r(x)|^p\,dx = \int_{-1}^{1}\alpha_j(x)|q_r^{(\alpha_j, p)}(x)|^p\,dx.$$

Введем обозначение для произвольного многочлена двух переменных со старшим членом x^my^n:

$$S_{mn}(x, y) = x^my^n + x^m\sum_{k=0}^{n-1}a_{mk}y^k + y^n\sum_{i=0}^{m-1}a_{in}x^i + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_{ik}x^iy^k. \qquad (1)$$

Теорема. *Для* $1 < p < \infty$ *имеет место равенство*

$$\min_{S_{mn}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)|S_{mn}(x,y)|^p\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\,|q_m^{(\alpha_1,p)}(x)\,q_n^{(\alpha_2,p)}(y)|^p\,dx\,dy.$$

Доказательство. Через $S_{mn}^{[p]}(x,y)$ обозначим тот многочлен из (1), который по весу $\alpha_1(x)\alpha_2(y)$ в L_p наименее уклоняется от нуля на квадрате $[-1, 1;\ -1, 1]$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial a_{ik}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|S_{mn}^{[p]}(x,y)\right|^p dx\,dy = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n;\ i + k \neq m + n),$$

или

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|S_{mn}^{[p]}(x,y)\right|^{p-1} \operatorname{sign} S_{mn}^{[p]}(x,y)\,x^i y^k\,dx\,dy = 0 \qquad (2)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n;\ i + k \neq m + n).$$

Пусть теперь $Q_{mn}(x,y)$ — многочлен вида (1), удовлетворяющий условиям (2). Покажем, что в этом случае

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|S_{mn}^{[p]}(x,y)\right|^p dx\,dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^p dx\,dy. \qquad (3)$$

Выберем $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Применяя к интегралу, стоящему справа в равенстве

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\varphi(x,y)\psi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \{[\alpha_1(x)\alpha_2(y)]^{1/p}\varphi(x,y)\}\cdot\{[\alpha_1(x)\alpha_2(y)]^{1/q}\psi(x,y)\}\,dx\,dy,$$

неравенство Гельдера, получаем обобщение этого неравенства

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\varphi(x,y)\psi(x,y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)|\varphi(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p} \left(\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)|\psi(x,y)|^q\,dx\,dy\right)^{1/q}. \qquad (4)$$

Далее, пользуясь рассуждениями, аналогичными [1] (гл. 11, § 2), и учитывая, что $Q_{mn}(x,y)$ и $S_{mn}^{[p]}(x,y)$ удовлетворяют условиям (2), имеем

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)|Q_{mn}(x,y)|^p\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)|Q_{mn}(x,y)|^{p-1} Q_{mn}(x,y) \operatorname{sign} Q_{mn}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^{p-1} S_{mn}^{[p]}(x,y) \operatorname{sign} Q_{mn}(x,y)\,dx\,dy +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^{p-1}[Q_{mn}(x,y)-S_{mn}^{[p]}(x,y)]\operatorname{sign}Q_{mn}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^{p-1}S_{mn}^{[p]}(x,y)\operatorname{sign}Q_{mn}(x,y)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^{p-1}\left|S_{mn}^{[p]}(x,y)\right|dx\,dy.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство (4), получаем

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^{p}dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^{p}dx\,dy\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|S_{mn}^{[p]}(x,y)\right|^{p}dx\,dy\right]^{1/p},$$

откуда следует, что

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|Q_{mn}(x,y)\right|^{p}dx\,dy\leqslant\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|S_{mn}^{[p]}(x,y)\right|^{p}dx\,dy.$$

Но здесь, в силу выбора многочлена $S_{mn}^{[p]}(x,y)$, возможно только равенство, и поэтому (3) доказана.

Таким образом, теорема будет доказана, если мы покажем, что многочлен

$$q_m^{(\alpha_1,p)}(x)\,q_n^{(\alpha_2,p)}(y)$$

удовлетворяет условиям (2).

Согласно выбору многочлена $q_r^{(\alpha_j,p)}(z)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial c_i(\alpha_j,p,r)}\int_{-1}^{1}\alpha_j(z)\left|q_r^{(\alpha_j,p)}(z)\right|^{p}dz=0$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)$$

и, значит,

$$\int_{-1}^{1}\alpha_j(z)\left|q_r^{(\alpha_j,p)}(z)\right|^{p-1}\operatorname{sign}q_r^{(\alpha_j,p)}(z)\,z^i\,dz=0 \tag{5}$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Учитывая, что $\operatorname{sign}(AB)=\operatorname{sign}A\cdot\operatorname{sign}B$, и используя равенства (5), получаем для $i\leqslant m$, $k\leqslant n$, $i+k\neq m+n$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\alpha_2(y)\left|q_m^{(\alpha_1,p)}(x)\,q_n^{(\alpha_2,p)}(y)\right|^{p-1}\operatorname{sign}[q_m^{(\alpha_1,p)}(x)\,q_n^{(\alpha_2,p)}(y)]\,x^iy^k\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)\left|q_m^{(\alpha_1,p)}(x)\right|^{p-1}\operatorname{sign}q_m^{(\alpha_1,p)}(x)\,x^i\,dx\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\alpha_2(y)\left|q_n^{(\alpha_2,p)}(y)\right|^{p-1}\operatorname{sign}q_n^{(\alpha_2,p)}(y)\,y^k\,dy=0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что некоторые частные случаи этой теоремы доказаны в [3]. Теорема, аналогичная приведенной, для случая $p=1$ и $\alpha_1(x)\equiv\equiv\alpha_2(y)\equiv 1$ доказана в [3, 4].

Так как [2] при $\alpha_1(x)\equiv 1$

$$\int_{-1}^{1}\left|q_r^{(1,p)}(x)\right|^p dx=\frac{2\left|q_r^{(1,p)}(1)\right|^p}{1+rp},$$

то по доказанной теореме

$$\min_{S_{mn}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|S_{mn}(x,y)\right|^p dx\,dy=\frac{4\left|q_m^{(1,p)}(1)\,q_n^{(1,p)}(1)\right|^p}{(1+mp)(1+np)}. \tag{6}$$

Рассмотрим одно применение доказанной теоремы. В [5] получена формула

$$\begin{aligned}\iint_{\bar{D}} F\,dx\,dy&=\frac{(-1)^{m-n-1}}{m!n!}\sum_{k=0}^{n-1}\int_C\frac{\partial^{2k}S_{mn}}{\partial x^k\partial y^k}\cdot\frac{\partial^{m+n-2k-1}F}{\partial x^{m-k-1}\partial y^{n-k}}\,dy+\\&+\frac{\partial^{2k+1}S_{mn}}{\partial x^{k+1}\partial y^k}\cdot\frac{\partial^{m+n-2k-2}F}{\partial x^{m-k-1}\partial y^{n-k-1}}\,dx+\frac{1}{m!n!}\sum_{k=0}^{m-n-1}(-1)^{m-n+k-1}\int_C\frac{\partial^{2n+k}S_{mn}}{\partial x^{n+k}\partial y^n}\cdot\\&\cdot\frac{\partial^{m-n-k-1}F}{\partial x^{m-n-k-1}}\,dy+R_{mn}(F),\end{aligned} \tag{7}$$

где остаток

$$R_{mn}(F)=\frac{(-1)^{m-n}}{m!n!}\iint_D S_{mn}\cdot\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\,dx\,dy.$$

Здесь $m\geqslant n$; C — контур области D; $F=F(x,y)\in W_{L_q}^{(m,n)}(M)$ — множеству функций F, имеющих в D абсолютно-непрерывные производные $F_{x^iy^j}^{(i+j)}$ $(i\leqslant m,\ j\leqslant n,\ i+j\leqslant m+n-1)$ и производную $F_{x^my^n}^{(m+n)}$, ограниченную по норме в L_q числом M.

Пусть

$$D=[-1,1;\,-1,1],\ 1<q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Формула (7) называется наилучшей для множества $W_{L_q}^{(m,n)}(M)$, если многочлен $S_{mn}=S_{mn}(x,y)$ выбран так, чтобы величина

$$\sup_{F\in W_{L_q}^{(m,n)}(M)}\left|R_{mn}(F)\right|=\frac{M}{m!n!}\Big[\iint_D\left|S_{mn}(x,y)\right|^p dx\,dy\Big]^{1/p}$$

приняла свое наименьшее значение.

В силу доказанной теоремы мы имеем наилучшую формулу (7), если в ней выбран многочлен

$$S_{mn}(x,y)=q_m^{(1,p)}(x)\,q_n^{(1,p)}(y).$$

При этом в соответствии с (6) для наилучшей формулы верхняя грань ошибки

$$\sup_{F\in W_{L_q}^{(m,n)}(M)}\left|R_{mn}(F)\right|=\frac{M\left|q_m^{(1,p)}(1)\,q_n^{(1,p)}(1)\right|}{m!n!}\sqrt[p]{\frac{4}{(1+mp)(1+np)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.
2. Аксень М. Б., Некоторые экстремальные задачи теории квадратурных формул, Автореферат диссертации, Минск, 1966.
3. Данко П. Е., О полиноме нескольких переменных, наименее уклоняющемся от нуля в метрике L_p, Сб., Ростов-на-Дону, Ин-т инж. ж.-д. транспорта, вып. 39, 1962, с. 54.
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 12, 44 (1963).
5. Левин М., Шац Э., Изв. АН ЭССР, Физ.-Матем., 18, 460 (1969).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 4/VII 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

В. СИНИВЕЭ

УРАВНЕНИЯ ВАНГСНЕСА—БЛОХА—РЕДФИЛЬДА С УЧЕТОМ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

V. SINIVEE. WANGSNESSI-BLOCHI-REDFIELDI VÕRRANDID INTERMOLEKULAARSETE INTERAKTSIOONIDEGA

V. SINIVEE. WANGSNESS-BLOCH-REDFIELD EQUATIONS INVOLVING INTERMOLECULAR INTERACTIONS

В работах по применению уравнений Вангснеса—Блоха—Редфильда (ВБР) [1,2] к задачам ядерного магнитного резонанса жидкостей под спиновой системой, как правило, понимают систему ядерных спинов одной молекулы. Этим не учитывают взаимодействие ядерных спинов, принадлежащих к различным молекулам (как однотипным, так и различных типов). Однако эти межмолекулярные взаимодействия ответственны за межмолекулярный вклад во времена спиновой релаксации и за межмолекулярный ядерный эффект Оверхаузера [3]. В данной работе приводятся обобщенные уравнения, позволяющие описывать отмеченные межмолекулярные эффекты. По-видимому, полученные уравнения можно применять также в случае разбавленных растворов парамагнитных частиц. Метод вывода их в основном соответствует примененному в [2], с той лишь разницей, что здесь дополнительно вводится предположение о статистической независимости среднего поведения молекулярных спиновых систем. Это предположение позволяет обрывать цепочку Боголюбова.

Рассматривая раствор, состоящий из молекул типа A, B, ... X, ..., приписываем соответствующим спиновым системам матрицы плотности σ_A, σ_B, ... Взамен уравнения ВБР получим систему матричных уравнений. Если (для сокращения записи) 1) учесть достаточность высоко-