$$1. \begin{cases} 011 \\ 011 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 010 \\ 110 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 001 \\ 101 \end{cases}$$

5) Из множества M_1 выбрасываем кодовые пары, участвовавшие в сравнении. (В нашем примере все кодовые пары множества M_1 были по крайней мере однажды сравнимыми.)

6) Оставшиеся кодовые пары множества M_1 и кодовые пары множества M_1' составят множество M_2 второго порядка (в данном случае совпадающее с M_1').

7) Кодовые пары множества M_2 будут попарно несравнимыми и повторное применение п. 4—6 невозможно. Построим сокращенную д. н. ф.:

$$f = x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3.$$

Алгоритм запрограммирован на языке МАЛГОЛ для ЭЦВМ «Минск-22». Транслированная программа занимает 796 ячеек памяти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1963.
2. Салум Х., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, 464 (1965).

Таллинский политехнический институт

Институт кибернетики Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 28/II 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969. Nr. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.4.13

М. ЛЕВИН, Э. ШАЦ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ НА СЛУЧАЙ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

M. LEVIN, E. SCHATZ. ÜHEST OSITI INTEGREERIMISE VALEMI ÜLDISTUSEST KAHEKORDSE INTEGRAALI PUHUL

M. LEWIN, E. SCHATZ. ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER PARTIELLEN INTEGRATIONSFORMEL IM FALLE EINES ZWEIDIMENSIONALEN INTEGRALS

В работах [1–3] рассматривается формула

$$\iint\limits_D F(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \int\limits_C \frac{\partial^{m-k-1}}{\partial x^{m-k-1}} P(x, y) \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(x, y) + R_m(f), \qquad (1)$$

где

$$R_m(f) = \frac{(-1)^m}{m!} \iint\limits_D P(x,y) \frac{\partial^m F(x,y)}{\partial x^m} dx\,dy, \tag{2}$$

C — контур области D, $P(x,y) = x^m + Q(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлен степени $m-1$ по x.

Эту формулу можно считать обобщением формулы интегрирования по частям для простых интегралов.

Ниже мы покажем, что выбор старшего члена функции $P(x,y)$ в виде x^m навряд ли можно считать самым удачным.

Естественно положить, что $P(x,y)$ является многочленом и по y:

$$P(x,y) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} x^k S_k(y),$$
$$S_k(y) = \sum_{i=0}^{n_k} a_{ik} y^i \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{3}$$

В связи с формулой (1) возникает вопрос наилучшего выбора многочлена (3).

Будем считать многочлен (3) наилучшим для формулы (1) на множестве Ф функций $F(x,y)$, если для него величина

$$R_m = \sup_{f \in \Phi} |R_m(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Теорема. *Пусть* $D = [-1,1; -1,1]$, Ф *состоит из функций* $F(x,y)$ *таких, что*

1° $\frac{\partial^k}{\partial x^k} F(x,y)$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ *абсолютно-непрерывны в* D,

2° $\left\| \frac{\partial^m}{\partial x^m} F(x,y) \right\|_{L_p(D)} \leqslant M \quad 1 < p < \infty.$

Тогда наилучший многочлен (3) *для формулы* (1) *на множестве* Ф *имеет вид*

$$P(x,y) = U_m(x), \tag{4}$$

где $U_m(x)$ — *многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным* 1, *наименее уклоняющийся от нуля в метрике* L_q $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$ *на отрезке* $[-1, 1]$.

Доказательство. Нетрудно убедиться (аналогично [4]), что

$$R_m = \frac{M}{m!} \{ \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |P(x,y)|^q\, dx\,dy \}^{1/q}. \tag{5}$$

Пусть теперь многочлен $P(x,y)$ является наилучшим, т. е. минимизирующим величину (5). В силу единственности такого многочлена должно быть $P(x,y) \equiv P(x,-y)$ и поэтому переменная y входит в (3) только в четных степенях.

Из условия

$$\frac{\partial}{\partial a_{ik}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |P(x,y)|^q\, dx\,dy = 0$$

$$(i=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n_k;\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$$

получаем равенства

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|P(x,y)|^{q-1}\operatorname{sign}P(x,y)\,x^k y^i\,dx\,dy=0, \tag{6}$$
$$(i=0,\ 2,\ \ldots,\ n_k;\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|P(x,y)|^q\,dx\,dy=2\int_{-1}^{1}|P(x,1)|^q\,dx-q\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|P(x,y)|^{q-1}\times$$
$$\times\operatorname{sign}P(x,y)\sum_{k=0}^{m-1}x^k\sum_{i=0}^{n_k}b_{ik}y^i\,dx\,dy.$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|P(x,y)|^q\,dx\,dy=2\int_{-1}^{1}|P(x,1)|^q\,dx. \tag{7}$$

По определению $U_m(x)$ имеем

$$\int_{-1}^{1}|U_m(x)|^q\,dx\leqslant\int_{-1}^{1}|P(x,1)|^q\,dx,$$

а отсюда и из (7)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|U_m(x)|^q\,dx\,dy\leqslant\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|P(x,y)|^q\,dx\,dy.$$

Многочлен $P(x,y)$ наименее уклоняется от нуля в $L_q(D)$ $(1<q<\infty)$. Так как такой многочлен единственен, то из последнего неравенства следует (4), что и доказывает теорему.

Выведем формулу, аналогичную (1), но уже со старшим членом $x^m y^n$ у многочлена.

Пусть

$$S(x,y)=x^m y^n+x^m\sum_{k=0}^{n-1}a_{mk}y^k+y^n\sum_{i=0}^{m-1}a_{in}x^i+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_{ik}x^i y^k.$$

Взяв в формуле Грина

$$\iint_D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C\varphi\,dy+\psi\,dx,$$

где C — контур области D,

$$\varphi=S\frac{\partial F}{\partial y},\quad \psi=F\frac{\partial S}{\partial x},$$

получим формулу

$$\iint_D S\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy=\int_C S\frac{\partial F}{\partial y}\,dy+\frac{\partial S}{\partial x}F\,dx+\iint_D F\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy. \tag{8}$$

Пусть теперь $m\geqslant n$.

Применяя последовательно формулу (8), получаем

$$\iint_D S\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\,dx\,dy=\sum_{k=0}^{n-1}\int_C\frac{\partial^{2k}S}{\partial x^k\partial y^k}\,\frac{\partial^{m+n-2k-1}F}{\partial x^{m-k-1}\partial y^{n-k}}\,dy+$$

$$+\frac{\partial^{2k+1}S}{\partial x^{k+1}\partial y^{k}}\frac{\partial^{m+n-2k-2}F}{\partial x^{m-k-1}\partial y^{n-k-1}}dx+\iint\limits_{D}\frac{\partial^{2n}S}{\partial x^{n}\partial y^{n}}\frac{\partial^{m-n}F}{\partial x^{m-n}}dx\,dy. \tag{9}$$

Применяя к последнему интегралу последовательно формулу (5) из [2], найдем

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial^{2n}S}{\partial x^{n}\partial y^{n}}\frac{\partial^{m-n}F}{\partial x^{m-n}}dx\,dy=\sum_{k=0}^{m-n-1}(-1)^{k}\int\limits_{C}\frac{\partial^{2n+k}S}{\partial x^{n+k}\partial y^{n}}\frac{\partial^{m-n-k-1}F}{\partial x^{m-n-k-1}}dy+$$

$$+\frac{(-1)^{m-n}}{m!n!}\iint\limits_{D}F\,dx\,dy. \tag{10}$$

Из равенств (9) и (10) выводим формулу

$$\iint\limits_{D}F\,dx\,dy=\frac{(-1)^{m-n-1}}{m!n!}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{C}\frac{\partial^{2k}S}{\partial x^{k}\partial y^{k}}\frac{\partial^{m+n-2k-1}F}{\partial x^{m-k-1}\partial y^{n-k}}dy+$$

$$+\frac{\partial^{2k+1}S}{\partial x^{k+1}\partial y^{k}}\frac{\partial^{m+n-2k-2}F}{\partial x^{m-k-1}\partial y^{n-k-1}}dx+$$

$$+\frac{1}{m!n!}\sum_{k=0}^{m-n-1}(-1)^{m-n+k-1}\int\limits_{C}\frac{\partial^{2n+k}S}{\partial x^{n+k}\partial y^{n}}\frac{\partial^{m-n-k-1}F}{\partial x^{m-n-k-1}}dy+R_{mn}(f), \tag{11}$$

где

$$R_{mn}(f)=\frac{(-1)^{m-n}}{m!n!}\iint\limits_{D}S\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^{m}\partial y^{n}}dx\,dy. \tag{12}$$

Аналогичная формула получается и для случая $m<n$.

Рассмотрим для формулы (11) экстремальную задачу. Через $W_{L_p}^{(m,n)}(M)$ обозначим класс функций $f(x,y)$, имеющих в $D=[0,1;0,1]$ абсолютно-непрерывные производные $f_{x^iy^k}^{(i+k)}$ $(i\leqslant m,\ k\leqslant n,\ i+k\leqslant \leqslant m+n-1)$ и производную $f_{x^my^n}^{(m+n)}$, норма которой в L_p ограничена числом M. Требуется выбрать многочлен $S=S(x,y)$ так, чтобы величина

$$R_{mn}^{(p)}=\sup_{f\in W_{L_p}^{(m,n)}(M)}|R_{mn}(f)|$$

приняла наименьшее значение.

По (12) имеем

$$R_{mn}^{(p)}=\frac{M}{m!n!}\{\int_0^1\int_0^1|S(x,y)|^{q}\,dx\,dy\}^{1/q},\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Отсюда следует, что наилучший многочлен в случае $q=1$ (см. [4]) имеет вид

$$S(x,y)=V_m(x)V_n(y)$$

и в случае $q=2$ —

$$S(x,y)=P_m(x)P_n(y),$$

где

$$V_r(z)=\frac{1}{2^r}Q_r(2z-1),$$

$$Q_r(z)=\frac{\sin(r+1)\arccos z}{2^r\sqrt{1-z^2}},$$

$$P_r(z)=\frac{r!}{(2r)!}[z^r(z-1)^r]^{(r)}.$$

Учитывая это, получаем оценки ошибки

$$R_{mn}^{(1)}=\frac{M}{m!n!4^{m+n}},$$

$$R_{mn}^{(2)}=\frac{n!m!M}{(2n)!(2m)!\sqrt{(2n+1)(2m+1)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сюй Л. С., Сообщ. АН ГрузССР, **29**, 521 (1962).
2. L. C. Hsu, Acta Mathem. Acad. Sci. Hung., **13**, 387 (1962).
3. L. C. Hsu, Acta Mathem. Acad. Sci. Hung., **14**, 359 (1963).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. наук, **12**, 44 (1963).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
10/VI 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

М. ЛЕВИН

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

M. LEVIN. ÜHEST EKSTREMAALÜLESANDEST

M. LEVIN. ON ONE EXTREME PROBLEM

Пусть $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — неотрицательные интегрируемые на отрезке $[-1,1]$ функции, $q_r(x)$ — произвольный многочлен степени r со старшим коэффициентом, равным единице, $p\geqslant 1$.

Через

$$q_r^{(\alpha_j,p)}(x)=x^r+\sum_{i=0}^{r-1}c_i(\alpha_j,p,r)x^i$$

обозначаем многочлен вида $q_r(x)$ такой, что

$$\min_{q_r}\int_{-1}^{1}\alpha_j(x)\left|q_r(x)\right|^p dx=\int_{-1}^{1}\alpha_j(x)\left|q_r^{(\alpha_j,p)}(x)\right|^p dx.$$

Введем обозначение для произвольного многочлена двух переменных со старшим членом x^my^n:

$$S_{mn}(x,y)=x^my^n+x^m\sum_{k=0}^{n-1}a_{mk}y^k+y^n\sum_{i=0}^{m-1}a_{in}x^i+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_{ik}x^iy^k. \qquad (1)$$