EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, Nr. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.4.07

В. УНТ

О СВЯЗИ ФУНКЦИИ ИНФОРМАЦИИ С ИСТОЧНИКОМ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Развивается дальше метод интегрирования уравнений Эйнштейна, предложенный в работах [1, 2]. В первом приближении устанавливается конкретная зависимость функции информации и других произвольных функций интегрирования от источника. Для этого определяется связь между компонентами метрического тензора g_{00} и $\tilde{g}_{00}$, из которых первая вычислена в координатах Бонди, вторая — в гармонических координатах. Затем находится зависимость $\tilde{g}_{00}$ от источника и коэффициенты разложения g_{00} в волновой зоне выражаются в виде интегралов по источнику. Та же проблема обсуждается для случая высших приближений.

1. Введение

Бонди и др. [3] разработали метод интегрирования уравнений Эйнштейна, который применим далеко от источников конечных размеров. При этом структура источника учитывается косвенно тем или иным выбором произвольных функций интегрирования, конкретная связь которых с источником не установлена. Целью настоящей статьи является нахождение этой связи в аксиально-симметричном случае в линейном приближении. Особенно важной является одна из произвольных функций интегрирования, так называемая функция информации. Она определяет временную зависимость решения, унос массы гравитационными волнами и гравитационную отдачу источника. Связь ее Фурье коэффициентов $\alpha_{1k}(u)$ с источником исследуется ниже более подробно и задается выражениями (29) и (45). Данную статью можно рассматривать как продолжение наших работ [1, 2], в которых метод Бонди сочетается с методом последовательных приближений.

В линейном приближении связь компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ с источником проще всего установить в гармонических координатах, где $g_{\mu\nu}$ являются решениями обычного волнового уравнения. Когда это сделано, можно перейти к координатной системе Бонди и найти таким образом связь функций интегрирования с источником. Так как в координатах Бонди все произвольные функции интегрирования встречаются в компоненте метрического тензора g_{00}, то для наших целей достаточно найти связь только этой одной компоненты с соответствующей компонентой метрического тензора в гармонических координатах. Это и будет проделано в данной работе. Пусть $x^\alpha = (u, r, \vartheta, \varphi)$ — координаты Бонди и $\tilde{x}^\alpha = (\tilde{t}, \tilde{x}^i)$ — гармонические координаты, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Во втором пункте найдем связь между g_{00} и $\tilde{g}_{00}$ в линейном приближении.

Это позволит нам в третьем и четвертом пунктах написать искомые функции интегрирования в виде интегралов по источникам гравитационного поля. В пятом пункте коснемся проблемы обобщения наших результатов на случай высших приближений. Основные результаты данной статьи содержатся в выражениях (27)—(31), (45), (51)—(53).

В пунктах 2—4 будем рассматривать линейное приближение, не оговаривая этого особо. Подразумевается, что все величины и уравнения взяты только в первом приближении. Будем пользоваться результатами и обозначениями из работ [1,2]. Единицы измерения выберем так, что скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице.

2. Связь между g_{00} и $\tilde{g}_{00}$

В линейном приближении (см. [2])

$$g_{00} = Vr^{-1} = \sum_{s,k} V_{s-1,\,k}(u)\, P_k(\cos\vartheta)\, r^{-s}. \tag{1}$$

Здесь

$$V_{0k} = -2\mu_k, \tag{2}$$

$$V_{1k} = k(k+1)\nu_k, \tag{3}$$

$$V_{sk} = -\frac{2(k+2)!\,\alpha_{s+1,\,k}}{(k-2)!\,(s-1)\,(s+2)}, \quad s \geqslant 2, \tag{4}$$

где μ_k, ν_k и α_{sk} являются интегралами следующих уравнений (точка обозначает производную по u):

$$\dot{\mu}_k = \frac{(k+2)!}{2(k-2)!}\,\dot{\alpha}_{1k}, \quad k \geqslant 0, \tag{5}$$

$$-3\dot{\nu}_k = \mu_k, \quad k \geqslant 1, \tag{6}$$

$$\dot{\alpha}_{s+1,\,k} = \frac{(s-1)\,(k-s+1)\,(k+s)}{2(s-2)\,(s+1)}\,\alpha_{sk} - \frac{1}{4}\nu_k\delta_{s2}, \quad k \geqslant 2, \quad s \geqslant 2. \tag{7}$$

При интегрировании уравнений (5)—(7) произвольно могут выбираться $\dot{\alpha}_{1k}$ и постоянные интегрирования, где $\dot{\alpha}_{1k}$ являются коэффициентами Фурье функции информации. Так как μ_k, ν_k и α_{sk} определяют однозначно не только g_{00}, но и остальные компоненты метрического тензора (эти выражения приведены в работе [2]), то можем сказать, что интеграл уравнений (5)—(7) определяет однозначно метрику далеко от источников. Например,

$$g_{02} = Ur^2 = \sum_{s,k} U_{s+2,\,k}\, P_k(\cos\vartheta)\, r^{-s}, \tag{8}$$

$$U_{sk} = -\frac{2(s-1)\,(k-1)\,(k+2)}{s\,(s-3)}\,\alpha_{s-1,\,k} + 2\nu_k\delta_{s3}. \tag{9}$$

Для установления связи α_{sk}, μ_k и ν_k с источником гравитационного поля найдем сначала $\tilde{g}_{00}$, эквивалентную решению системы (5)—(7).

Перейдем к гармонической координате времени $\tilde{t}$ (квадратом τ будем пренебрегать):

$$\tilde{t} = u + r + \tau(u, r, \vartheta), \tag{10}$$

где τ удовлетворяет уравнению (см. книгу В. Фока [4], § 53)

$$\square\tau = \Gamma^0 + \Gamma^1. \tag{11}$$

Здесь $\square$ — оператор Даламбера в плоском пространстве-времени, а

$$\Gamma^0 = 0, \tag{12}$$

$$\Gamma_1 = r^{-2}(rV)_{,1} - (U_{,2} + \cot\vartheta U). \tag{13}$$

Из (13), (2)—(4), (8) и (9) получаем

$$\Gamma^1 = \sum_{s,k} G_{sk}(u) P_k(\cos\vartheta) r^{-s}, \tag{14}$$

$$G_{1k} = 0, \tag{15}$$

$$G_{20} = -2\mu_0, \quad G_{21} = -2\mu_1, \quad G_{2k} = 0, \quad \text{если} \quad k \geqslant 2, \tag{16}$$

$$G_{3k} = 2k(k+1)\nu_k, \tag{17}$$

$$G_{sk} = -\frac{4(k+2)!}{(k-2)!\,s(s-3)} a_{s-1,k}, \quad s \geqslant 4. \tag{18}$$

Проинтегрируем линейное дифференциальное уравнение (11). Произвольное решение однородного волнового уравнения, которое можно было бы прибавить к интегралу уравнения (11), положим равным нулю. Это означает, что уравнение $\square\tilde{t} = 0$ нигде в пространстве не будет иметь источников. Другими словами, условие гармоничности будет удовлетворяться не только далеко от источников, но и во всем пространстве — времени. Будем искать τ в виде ($\mu_0 = \text{const}$):

$$\tau = 2\mu_0 \ln r + \sum_{s,k} \tau_{sk}(u) P_k(\cos\vartheta) r^{-s}. \tag{19}$$

Подставляя (12), (13), (14) и (19) в уравнение (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, имеем

$$\dot{\tau}_{sk} = \frac{1}{2(s-1)}\left[(k-s+2)(k+s-1)\tau_{s-1,k} - G_{s+1,k}\right]. \tag{20}$$

Вставляя сюда значения G_{sk} из (15)—(18), учитывая (5)—(7) и производя интегрирование, получаем

$$\tau_{01} = -\mu_1, \text{ остальные } \tau_{0k} = 0, \tag{21}$$

$$\dot{\tau}_{1k} = -\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}\mu_k, \quad k > 0, \tag{22}$$

$$\dot{\tau}_{2k} = \frac{k(k-1)(k+4)}{2(k+2)}\nu_k, \tag{23}$$

$$\dot{\tau}_{sk} = -\frac{k(k-1)(k-s+1)(k+s+2)}{(s+1)(s-2)} a_{sk}, \quad s \geqslant 3. \tag{24}$$

Эти значения $\dot{\tau}_{sk}$ получены при дополнительном условии $\tau_{k+1,k} = 0$, которое гарантирует сходимость решения.

Пусть

$$\tilde{g}_{00} = \sum_{s,k} \mathfrak{A}_{sk}(u) P_k(\cos\vartheta) r^{-s}. \tag{25}$$

Учитывая (25), (1), (19) и соотношение $\tilde{g}_{00} = g_{00} - 2\dot{\tau}$, имеем

$$\mathfrak{A}_{sk} = V_{s-1,k} - 2\dot{\tau}_{sk}. \tag{26}$$

Пользуясь выражениями (2)—(4) и (21)—(24), получаем после элементарных вычислений*

$$\mu_0 = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}_{10}, \tag{27}$$

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}\mathfrak{A}_{11}, \tag{28}$$

$$\alpha_{1k} = -\frac{1}{2k(k-1)}\mathfrak{A}_{1k}, \quad k \geqslant 2, \tag{29}$$

$$\nu_k = \frac{(k+2)}{6k}\mathfrak{A}_{2k}, \tag{30}$$

$$\alpha_{sk} = -\frac{(s-2)}{2sk(k-1)}\mathfrak{A}_{sk}, \quad s \geqslant 3. \tag{31}$$

Коэффициенты $\mathfrak{A}_{sk}$ можно непосредственно связать с источниками гравитационного поля. Это будет сделано в следующих пунктах.

Отметим еще, что из уравнения $\Box\tilde{g}_{00} = 0$ вытекают рекуррентные уравнения, которым должны удовлетворять $\mathfrak{A}_{sk}$:

$$2s\dot{\mathfrak{A}}_{s+1,k} = (s+k)(k-s+1)\mathfrak{A}_{sk}. \tag{32}$$

Произвольными остаются здесь только $\dot{\mathfrak{A}}_{1k}$ и постоянные интегрирования, они и определяются структурой источника.

3. Связь $\mathfrak{A}_{1k}$ с источником

В гармонических координатах имеем

$$\Box\tilde{g}_{00} = -8\pi\sigma, \tag{33}$$

где

$$\sigma \equiv T_0^0 - T_i^i, \tag{34}$$

а $T_{\mu\nu}$ — компоненты тензора материи в плоском пространстве-времени в квазигалилеевых координатах; индексы при нем поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора плоского пространства-времени. Интеграл уравнения (33) можно записать в виде запаздывающего потенциала

$$\tilde{g}_{00} = -2\int\frac{\sigma(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \tag{35}$$

где dV' элемент объема. Разлагая правую сторону последнего равенства в ряд типа (25), получаем выражения для $\mathfrak{A}_{sk}$. Найдем сначала $\mathfrak{A}_{1k}$.

Пусть Ψ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. При $r > r'$ ($r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$, $r'^2 = \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r'^k}{r^{k+1}}P_k(\cos\Psi), \tag{36}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - r'\cos\Psi - \sin\Psi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r'^{k+1}}{k(k+1)r^k}P_k^{(1)}(\cos\Psi). \tag{37}$$

---

* Если $\mathfrak{A}_{10}$ зависит от времени, то в (27) эту величину нужно заменить ее статическим значением до начала или после конца излучения, так как из (5) следует $\dot{\mu}_0 = 0$. Эта замена допустима, так как при решении уравнений (20) τ_{10} остается неопределенной и, следовательно, $\dot{\tau}_{10}$ можно выбрать таким образом, что периодически меняющиеся члены в $\mathfrak{A}_{10}$ компенсируются.

Имеем

$$\sigma(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\mathbf{r}')=\sigma(u+r'\cos\Psi,\mathbf{r}')+O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{38}$$

Разложим $\sigma(u+r'\cos\Psi,\mathbf{r}')$ в следующий ряд:

$$\sigma(u+r'\cos\Psi,\mathbf{r}')=\sum_k \sigma_k(u,\mathbf{r}')P_k(\cos\Psi), \tag{39}$$

где

$$\sigma_k=\frac{2k+1}{2}\int_0^\pi \sigma(u+r'\cos\Psi,\mathbf{r}')P_k(\cos\Psi)\sin\Psi\,d\Psi, \tag{40}$$

или

$$\sigma_k=\frac{2k+1}{2}\sum_{n=0}^\infty A_{kn}\frac{r'^n}{n!}\frac{d^n}{du^n}\sigma(u,\mathbf{r}'). \tag{41}$$

Здесь

$$A_{kn}\equiv\int_0^\pi\cos^n\Psi P_k(\cos\Psi)\sin\Psi\,d\Psi.$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_{kn}=0, \quad \text{если} \quad n<k,\\ A_{00}=2,\\ A_{2a,2b}=\dfrac{2^{a+1}b!\,(2b-1)!!}{(2a+2b+1)!!\,(b-a)!},\\ A_{2a,2b+1}=A_{2a+1,2b}=0,\\ A_{2a+1,2b+1}=\dfrac{2^{a+1}b!\,(2b+1)!!}{(2b+2a+3)!!\,(b-a)!}, \quad \text{если} \quad b\geqslant a,\ b\neq 0. \end{array}\right. \tag{42}$$

Угол Ψ можно выразить через полярные углы ϑ, ϑ', φ, φ':

$$P_l(\cos\Psi)=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\vartheta)P_l^{|m|}(\cos\vartheta')e^{-im(\varphi-\varphi')}. \tag{43}$$

Принимая во внимание, что вследствие аксиальной симметрии $\sigma(u,\mathbf{r}')$ не зависит от φ', получаем из (35) с учетом (36), (38), (39) и (43)

$$\tilde{g}_{00}=-\frac{2}{r}\sum_k P_k(\cos\vartheta)\int\sigma_k P_k(\cos\vartheta')\,dV'+O\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{44}$$

Далее из (25), (44) и (41) следует

$$\mathfrak{A}_{1k}=-(2k+1)\sum_{n=k}^\infty A_{kn}\frac{1}{n!}\frac{d^nD_n}{du^n}, \tag{45}$$

где численные коэффициенты A_{kn} заданы выражениями (42), а

$$D_n\equiv\int_V(T_0^0-T_i^i)r^nP_k(\cos\vartheta)\,dV. \tag{46}$$

Для нахождения конкретного вида $\mathfrak{A}_{1k}$ нужно уточнить $T_{\mu\nu}$. Сейчас мы найдем только приближенные выражения для $\mathfrak{A}_{1k}$. Предположим, что вклад в общую массу источника от тензора натяжений и кинетической энергии мал, и берем

$$\sigma\equiv T_0^0-T_i^i\approx\varrho, \tag{47}$$

где ϱ — плотность массы покоя источника. Тогда, отбрасывая в (45) с той же точностью все члены, кроме первого, имеем

$$\mathfrak{A}_{1k} \approx -\frac{2k+1}{k!} A_{kk} \frac{d^k}{du^k} D_k, \tag{48}$$

где

$$D_k = \int \varrho(u, r, \vartheta) r^k P_k(\cos\vartheta) dV. \tag{49}$$

Отметим, что порядок величины отброшенных в $\mathfrak{A}_{1k}$ членов равен порядку величины коэффициента $\mathfrak{A}_{1,k+2}$. При изучении переноса массы гравитационными волнами обычно достаточно учитывать только квадрупольное излучение, т. е. коэффициент

$$\mathfrak{A}_{12} = -\frac{2}{3} \frac{d^2}{du^2} D_2,$$

где D_2 определяется интегралом (49).

Пользуясь выражениями (27)—(29), (45) и (46), можем для каждого конкретного источника $T_{\mu\nu}$ вычислить μ_0, μ_1 и α_{1k}. При этом существенно, чтобы выполнялось условие $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, так как уравнения (5) и (6) выводятся в конечном счете из тождеств Бианки.

4. Связь постоянных интегрирования с источником

Рассмотрим сначала статические решения системы (5)—(7) $\mu_0 = \text{const}$, $\nu_1 = \text{const}$, $\alpha_{k+1,k} = \text{const}$ и найдем значения постоянных интегрирования. Пусть $\frac{\partial\sigma}{\partial u} = 0$. Тогда можем написать (35) в виде

$$\tilde{g}_{00} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{r^{k+1}} \int \sigma r'^k P_k(\cos\Psi) dV'$$

или, пользуясь выражениями (43) и (46) и учитывая аксиальную симметрию источника, в виде

$$\tilde{g}_{00} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k P_k(\cos\vartheta)}{r^{k+1}}. \tag{50}$$

Из (27), (30), (31), (25), (50) и (47) следует

$$\mu_0 = \int (T_0 - T_i^i) dV \approx \int \varrho \, dV, \tag{51}$$

$$\nu_1 = -\int (T_0^0 - T_i^i) r \, dV \approx -\int \varrho r \, dV, \tag{52}$$

$$\alpha_{k+1,k} = \frac{D_k}{k(k+1)}, \tag{53}$$

где D_k заданы выражением (46) или (49). Здесь (51) дает массу источника, (52) определяет его дипольный момент.

Отметим, что при интегрировании уравнений (7) можно также положить

$$\alpha_{s+1,k} = \text{const}, \quad s < k, \tag{54}$$

имея

$$\alpha_{s+l,k} = \text{const}\, u^{l-1}, \quad 1 < l \leqslant k - s + 1. \tag{55}$$

В гармонических координатах этому решению соответствуют такого же типа выражения для $\mathfrak{A}_{sk}$:

$$\mathfrak{A}_{s+1,k} = \text{const}, \tag{54а}$$

$$\mathfrak{A}_{s+l,k} = \text{const}\, u^{l-1}, \quad 1 < l \leqslant k - s + 1. \tag{54б}$$

Соответствующие значения $\mathfrak{A}_{sk}$ можно вычислить и из (35). Специального исследования требует вопрос о существовании такого тензора материи, в случае которого реализуется решение (54), (55). Если такое решение существует, то это означает, что мы имеем во втором приближении неизлучающее нестатическое решение, так как перенос массы определяется квадратичным относительно $\dot{\alpha}_{1k}$ выражением. Существует по крайней мере одно неизлучающее нестатическое решение уравнений (5)—(7):

$$\mu_0 \approx \int \varrho \, dV,$$

$$\mu_1 \approx 3 \frac{d}{du} \int \varrho r \, dV,$$

$$\nu_1 \approx -\int \varrho r \, dV,$$

где $\mu_1 = \text{const} \neq 0$ и $\nu_1 = \text{const}\, u$. Этот результат можно получить для случая одной массы, пользуясь уравнениями $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ и выражениями, приведенными в § 71 книги В. Фока [4]. Последнее решение соответствует источнику, движущемуся с постоянной скоростью вдоль полярной оси.

5. О высших приближениях

Интегрируя уравнения Эйнштейна методом быстрых приближений, мы на каждой ступени аппроксимации интегрируем только линейные уравнения. При этом решение в n-м приближении получается суперпозицией двух решений, первое из которых определяется нелинейными членами n-го порядка, а второе — членами $(n-1)$-го порядка в тензоре материи. При интегрировании уравнений Эйнштейна далеко от источников в координатах Бонди мы учитываем вклад от $\underset{n-1}{T_{\mu\nu}}$ некоторым выбором $\underset{n}{\dot{\alpha}_{1k}}$ и постоянных интегрирования (индекс под буквой указывает порядок величины члена). Связь $\underset{n}{\dot{\alpha}_{1k}}$ с $\underset{n-1}{T_{\mu\nu}}$ можно установить точно таким же образом, как и в линейном приближении, когда $n=1$. Но при $n>1$ возникает дополнительная трудность. В $\underset{n-1}{T_{\mu\nu}}$ будут входить $g_{\mu\nu}$. Если мы с самого начала будем пользоваться внутри источника координатами Бонди, то при интегрировании в n-м приближении уравнения типа (11) нам придется, по-видимому, добавить к τ еще некоторое решение однородного волнового уравнения, так как могут возникнуть источники координатных волн вследствие того, что условие гармоничности $\widehat{\Box}\tilde{t}=0$ внутри материи не выполняется. Здесь $\widehat{\Box}$ — оператор Даламбера в искривленном пространстве.

6. Заключение

Может возникнуть проблема, почему вообще нужно пользоваться координатной системой Бонди, если для установления физического смысла встречающихся здесь величин приходится вводить гармонические координаты. Дело в том, что при учете вклада от нелинейных членов гармонические координаты не всегда дают удовлетворительные для волновой зоны результаты. Найденная же выше связь между α_{1k} и тензором материи позволяет, например, установить в решении уравнений

Эйнштейна для каждого конкретного источника энергию и импульс, переносимые гравитационными волнами во втором приближении. Выведенные выше соотношения могут оказаться полезными также при дальнейшем исследовании неизлучающихся нестатических решений уравнений Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Унт В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, 164 (1968).
2. Унт В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, 290 (1968).
3. Bondi H., Van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K., Proc. Roy. Soc., **269**, 21 (1962).
4. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961.

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/XII 1968

V. UNT

INFORMATSIOONIFUNKTSIOONI SEOSEST ALLIKAGA AKSIAAL-SÜMMEETRILISEL JUHUL

Arendatakse edasi Einsteini võrrandite integreerimise meetodit, mis on esitatud töödes [1, 2]. Informatsioonifunktsioon ja teised meelevaldsed integreerimisfunktsioonid avaldatakse esimeses lähenduses välja allika kaudu. Selleks leitakse kõigepealt seos meetrise tensori komponentide g_{00} vahel harmoonilistes ja Bondi koordinaatides ning allikatest kaugel asuv väli avaldatakse harmoonilistes koordinaatides integraalina üle allika. Mõnevõrra käsitletakse ka kõrgemate lähendite juhtu.

V. UNT

ON THE CONNECTION OF NEWS FUNCTION WITH SOURCE IN AXI-SYMMETRIC CASE

The method of integration of the Einstein equations, proposed in papers [1, 2], is developed further. In the first approximation, the connection of the Fourier coefficients $\dot{a}_{lk}$ of the news function with the source is found (formulae (29), (45) or (48)), as well as that of other integration functions. The following method is used. The connection between the decomposition coefficients of the components of the metric tensor g_{00} in the Bondi and harmonic coordinates is found ((27)—(31)), and the far field is expressed in terms of the integrals over the source calculated in harmonic coordinates ((35), (25), (45), (50)). Higher approximations are briefly discussed.