EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, Nr. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.4.06

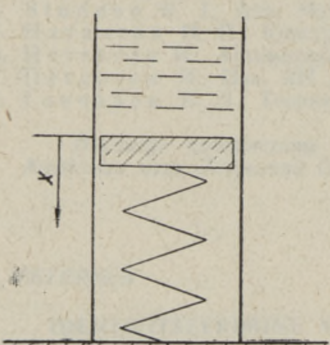
Н. ВЕКСЛЕР

ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС КОЛЕБАНИЯ ЦЕПОЧКИ МАСС, СОЕДИНЕННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ ПРУЖИНАМИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ*

Сообщение первое

Масса, соединенная с пружиной, опертой на жесткое основание, колеблется под действием плоской падающей синусоидальной волны давления. В нестационарной постановке определяется поле давления отраженной и излученной волн. Полученный результат обобщается на следующие задачи: колебание массы, встречающее механическое сопротивление, пропорциональное скорости перемещения; колебание цепочки из конечного числа произвольных масс и пружин; колебание цепочки из конечного числа равных масс, соединенных между собой пружинами одинаковой жесткости при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости перемещения.

1. Рассмотрим задачу об определении поля давления отраженной и излученной волн, вызванных колебанием поршня площади F и массы M под действием падающей плоской гидроакустической синусоидальной волны давления. Поршень соединен с пружиной жесткости C, опертой на жесткое основание (см. рисунок).



Движение жидкости описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

Здесь ψ — потенциал скорости жидкости, c — скорость звука в жидкости, x — координата, t — время.

Давление p и скорость v жидкости через потенциал скорости выражаются в виде

$$p = \varrho\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1.2}$$

где ϱ — плотность жидкости.

Перемещение поршня определяется уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k^2u = q\frac{\partial\psi}{\partial t}(0, t) \quad \left(k^2 = \frac{C}{M},\ q = \frac{F}{M}\varrho\right). \tag{1.3}$$

На поверхности поршня выполняется условие контакта: скорость поршня равна скорости жидкости

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(0, t). \tag{1.4}$$

* Работа доложена на конференции по проблеме колебаний механических систем, Киев, август 1968 г.

Потенциал скорости жидкости ψ представим в виде суммы

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \tag{1.5}$$

где ψ_0 — потенциал скорости падающей волны; ψ_1 — потенциал скорости отраженной и излученной волн. Считаем, что источник падающей волны находится на значительном расстоянии от поверхности поршня, а потенциал скорости падающей волны имеет вид

$$\psi_0(x, t) = -\frac{p_0}{\varrho\omega}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \gamma\right] H\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]. \tag{1.6}$$

Здесь p_0 — амплитуда давления, ω — частота колебания источника, H — единичная функция Хевисайда.

Начальные условия при $t = 0$ (время t отсчитывается от момента соприкосновения падающей волны с поверхностью поршня)

$$\psi(x, 0) = -\frac{p_0}{\varrho\omega}\cos\left(\omega\frac{x}{c} + \gamma\right), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x, 0) = -\frac{p_0}{\varrho}\sin\left(\omega\frac{x}{c} + \gamma\right). \tag{1.7}$$

В начальный момент времени поршень считается неподвижным:

$$u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0, \tag{1.8}$$

а потенциал скорости отраженной и излученной волн ψ_1 — удовлетворяющим нулевым начальным условиям:

$$\psi_1(x, 0) = \frac{\partial\psi_1}{\partial t}(x, 0) = 0. \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.3) при условиях (1.8) имеет вид [1]

$$u = \frac{q}{k}\int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial\tau}(0, \tau)\sin k(t - \tau)\, d\tau. \tag{1.10}$$

Потенциал скорости отраженной и излученной волн представим в форме

$$\psi_1(x, t) = p_0\varphi\left(t + \frac{x}{c}\right) H\left(t + \frac{x}{c}\right), \tag{1.11}$$

удовлетворяющей волновому уравнению и нулевым начальным условиям.

Если ввести в качестве новой неизвестной давление отраженной и излученной волн на поверхности поршня

$$f(t) = \varrho\varphi'\left(t + \frac{x}{c}\right)\Big|_{x=0}, \tag{1.12}$$

где штрих означает производную по аргументу, то с учетом (1.5) и (1.10) условие контакта (1.4) получает вид

$$f(t) = \sin(\omega t + \gamma) - qc\int_0^t \cos k(t - \tau)\sin(\omega\tau + \gamma)\, d\tau -$$

$$- qc\int_0^t \cos k(t - \tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{1.13}$$

Вычислив первый интеграл и введя обозначения

$$G(t) = \alpha_1 \sin \omega t + \beta_1 \cos \omega t + \alpha_2 \sin kt + \beta_2 \cos kt,$$

$$N(t) = -qc \cos kt \qquad \delta = qc\frac{\omega}{\omega^2 - k^2},$$

$$\alpha_1 = \cos\gamma - \delta \sin\gamma, \quad \alpha_2 = \frac{k}{\omega}\delta \sin\gamma, \quad \beta_1 = \sin\gamma + \delta\cos\gamma, \quad \beta_2 = -\delta\cos\gamma,$$

придадим уравнению (1.13) классическую форму интегрального уравнения Вольтерра второго рода типа свертки:

$$f(t) = G(t) + \int_0^t N(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{1.14}$$

Решение уравнения (1.14) имеет вид [2]

$$f(t) = G(t) + \int_0^t Q(\tau) G(t-\tau)\, d\tau, \tag{1.15}$$

где

$$Q(t) = 2ae^{-at}\left[\frac{a}{b}\left(\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}\right) - \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}\right];$$

$$a = \frac{qc}{2}, \quad b = \sqrt{k^2 - a^2}. \tag{1.16}$$

В зависимости от величины подкоренного выражения в (1.16) имеем

$$1)\ k^2 - a^2 > 0, \quad Q_1(t) = 2ae^{-at}\left(\frac{a}{b}\sin bt - \cos bt\right), \tag{1.17}$$

$$2)\ k^2 - a^2 = 0, \quad Q_2(t) = 2ae^{-at}(-1 + at), \tag{1.18}$$

$$3)\ k^2 - a^2 < 0, \quad Q_3(t) = 2ae^{-at}\left(\frac{a}{l}\operatorname{sh} lt - \operatorname{ch} lt\right) \quad (l = ib). \tag{1.19}$$

Подставив (1.17) в (1.14) и проведя интегрирование, получим

$$f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \xi_1) + B_1 e^{-at}\sin(bt + \zeta_1), \tag{1.20}$$

где

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad B_1 = \sqrt{a_3^2 + a_4^2}, \quad \xi_1 = \operatorname{arctg}\frac{a_2}{a_1}, \quad \zeta_1 = \operatorname{arctg}\frac{a_3}{a_4},$$

$$a_1 = \alpha_1 a_5 - a\beta_1 a_6, \quad a_2 = a\alpha_1 a_6 - \beta_1 a_5,$$

$$a_3 = \frac{a^2}{b}a_7 - a^2 a_8 - \frac{a^3}{b}a_9 - a a_{10}, \quad a_4 = -\frac{a^3}{b}a_8 - a a_7 - \frac{a^2}{b}a_{10} + a^2 a_9,$$

$$a_5 = 1 + a_2\frac{\mu_1}{b} - a^2\mu_1, \quad a_6 = a_2\frac{\lambda_1}{b} + \nu_1, \quad a_7 = \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2,$$

$$a_8 = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2, \quad a_9 = \beta_1\varkappa_1 + \beta_2\varkappa_2, \quad a_{10} = \beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2,$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{a^2 + (b+\omega)^2} + \frac{1}{a^2 + (b-\omega)^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{a^2 + (b+k)^2} + \frac{1}{a^2 + (b-k)^2},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2 + (b+\omega)^2} - \frac{1}{a^2 + (b-\omega)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{a^2 + (b+k)^2} - \frac{1}{a^2 + (b-k)^2},$$

$$\mu_1 = \frac{b+\omega}{a^2+(b+\omega)^2} + \frac{b-\omega}{a^2+(b-\omega)^2}, \quad \mu_2 = \frac{b+k}{a^2+(b+k)^2} + \frac{b-k}{a^2+(b-k)^2},$$

$$\nu_1 = \frac{b+\omega}{a^2+(b+\omega)^2} - \frac{b-\omega}{a^2+(b-\omega)^2}, \quad \nu_2 = \frac{b+k}{a^2+(b+k)^2} - \frac{b-k}{a^2+(b-k)^2}.$$

Давление отраженной и излученной волн представим в виде

$$p_1(x,t) = p_0[A_1 \sin(\omega\tau_1 + \xi_1) + B_1 e^{-a\tau_1} \sin(b\tau_1 + \zeta_1)]H(\tau_1)$$
$$\left(\tau_1 = t + \frac{x}{c}\right). \tag{1.21}$$

Подставив в (1.14) выражения (1.18) и (1.19) и проведя необходимые выкладки, соответственно получим

$$p_2(x,t) = p_0[A_2 \sin(\omega\tau_1 + \xi_2) + B_2 e^{-a\tau_1}(\tau_1 + B_{20})]H(\tau_1), \tag{1.22}$$

$$p_3(x,t) = p_0[A_3 \sin(\omega\tau_1 + \xi_3) + B_3 e^{-a\tau_1}(e^{l\tau_1} + B_{30}e^{-l\tau_1})]H(\tau_1). \tag{1.23}$$

Входящие в формулы (1.22), (1.23) константы ради краткости опускаем.

2. Обобщим полученный результат. Сначала укажем поправки, которые вносит учет внутреннего механического сопротивления, на поле давления отраженной и излученной волн, рассмотренное выше.

Вместо уравнения (1.3) имеем

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2n\frac{du}{dt} + k^2u = q\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,t) \quad \left(2n = \frac{C'}{M}\right). \tag{2.1}$$

C' — коэффициент сопротивления, пропорциональный скорости перемещения.

Решением уравнения (2.1) при нулевых начальных условиях является

$$u = \frac{q}{r}e^{-nt}\int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial\tau}(0,\tau)e^{n\tau}\sin r(t-\tau)\,d\tau \quad (r = \sqrt{k^2-n^2}). \tag{2.2}$$

Использовав условие контакта, аналогичное (1.13), и проведя необходимые выкладки, получим, что давление отраженной и излученной волн при

$$d = \sqrt{k^2-n^2-a^2-2an}, \quad k^2-n^2-a^2-2an > 0 \tag{2.3}$$

определяется выражением

$$p_1(x,t) = p_0[L\sin(\omega\tau_1+\varepsilon) + De^{-(n+a)\tau_1}\sin(d\tau_1+\sigma)]H(\tau_1). \tag{2.4}$$

Входящие в формулу константы ради краткости не приводим.

Применим изложенную выше методику к определению поля давления отраженной и излученной волн при колебании цепочки из конечного числа m произвольных масс и пружин без учета сил сопротивления. Колебание цепочки масс и пружин описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно перемещений масс; при этом колебание массы, находящейся в контакте с жидкостью, описывается уравнением типа (1.3), а колебание остальных масс — уравнениями без правой части. Применив к решению системы уравнений метод Даламбера, получим решение в виде интегралов с переменным верхним пределом. Из условия контакта получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода типа свертки относительно давления отраженной и излученной волн на поверхности поршня. Можно показать, что давление отраженной и излученной волн при выполнении условий, аналогичных (1.17), имеет форму

$$p_1(x,t) = p_0[A \sin(\omega\tau_1 + \xi) + \sum_{i=1}^{m} B_i e^{-a_i\tau_1} \sin(b_i\tau_1 + \zeta_i)]H(\tau_1). \qquad (2.5)$$

При колебании цепочки из m равных масс, соединенных между собой пружинами одинаковой жесткости, при наличии механических сил сопротивления, пропорциональных скорости перемещения, нетрудно показать, что поле давления отраженной и излученной волн при выполнении условий типа (2.4) имеет форму

$$p_1(x,t) = p_0[L \sin(\omega\tau_1 + \varepsilon) + \sum_{i=1}^{m} D_i e^{-(n+a_i)\tau_1} \sin(d_i\tau_1 + \sigma_i)]H(\tau_1). \qquad (2.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, 2, М., 1956.
2. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., 1960.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/III 1968

N. VEKSLER

VEDRUDEGA ÜHENDATUD MASSIDE REA MITTESTATSIONAARSED VÕNKUMISED HÜDROAKUSTILISE RÕHU TOIMEL. I

Võrranditega (1.1)—(1.9) kirjeldatud ülesande jaoks esitatakse peegelduva ja kiirguva rõhu väli (1.21)—(1.23). Tulemused on üldistatud vedrudega ühendatud masside rea jaoks (2.5)—(2.6).

N. VEKSLER

TRANSIENT VIBRATIONS OF A SYSTEM OF MASSES, CONNECTED IN SERIES BY SPRINGS, TO A FIXED SUPPORT UNDER THE ACTION OF A HYDROACOUSTIC PRESSURE. I

For a problem described by equations (1.1)—(1.9), the acoustical field of pressure of reflectional and radiational waves is defined (1.21)—(1.23). Results are generalized for a problem of vibrations of a system of masses connected by springs (2.5)—(2.6).