EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, Nr. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.4.05

И. ПЕТЕРСЕН

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПО РАВНОТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ В ТОЧКАХ ЧЕБЫШЕВА

Исследуется оценка наименьших квадратов полинома одной переменной по равноточным некоррелированным измерениям в точках Чебышева. Устанавливается скорость сходимости в смысле среднеквадратичной ошибки интерполяционного процесса по равноточным измерениям в случае дифференцируемых функций.

1. Свойства оценки наименьших квадратов полинома степени m по равноточным некоррелированным измерениям на отрезке $[-1, +1]$ подвергались исследованию в случае двух систем точек измерений. Гэст [1] показал, что если измерения производятся в нулях производной полинома Лежандра и в точках -1, $+1$, то соответствующая оценка имеет наименьшую максимальную на $[-1, +1]$ дисперсию по сравнению с любым другим расположением $m+1$ точек измерений. Максимальное значение дисперсии на $[-1, +1]$ при этом оказалось равным дисперсии ошибки одного измерения σ^2. Гоэл и Левин [2] рассматривали систему точек $x_i = -\cos i\pi/m$ $(i=0, 1, \ldots, m)$, которые являются точками максимумов $|T_m(x)|$ на $[-1, +1]$, где $T_m(x)$ — полином Чебышева степени m. Они установили, что для любой фиксированной точки вне отрезка $[-1, +1]$ оценка наименьших квадратов по измерениям в этих точках имеет наименьшую дисперсию. Кифер и Вольфовиц [3] показали, что для оценки старшего коэффициента полинома оптимальными являются также точки максимумов $|T_m(x)|$. Этот результат в несколько измененном виде был обобщен Стюденом [4] на проблему оценки всех коэффициентов полинома в отдельности.

Во всех этих случаях оценка полинома степени m производится по измерениям в $m+1$ точках, т. е. оценки совпадают с соответствующими интерполяционными полиномами Лагранжа. Известно [5], что по точным значениям функции интерполяционные полиномы Лагранжа имеют хорошие аппроксимативные свойства, если узлами являются узлы Чебышева, т. е. нули полинома $T_{m+1}(x)$. Распределение узлов Чебышева похоже на распределение точек максимума $T_m(x)$ и поэтому можно предполагать, что оценка полинома по измерениям в узлах Чебышева является хорошей (хотя и не оптимальной) как для оценки полинома вне отрезка $[-1, +1]$, так и для оценки его отдельных коэффициентов. Так как узлы Чебышева, кроме того, легко вычисляются для любого m: $x_i = -\cos \frac{2i+1}{2m+2}\pi$ $(i=0, 1, \ldots, m)$, то представляет интерес, какой максимальной дисперсии достигает соответствующая оценка (полином

Лагранжа) на отрезке $[-1, +1]$. В настоящей заметке соответствующие оценки устанавливаются применением «метода воспроизводящих ядер» [6, 7]. Оказывается, что максимальная дисперсия оценки по измерениям в узлах Чебышева менее чем в два раза больше максимальной дисперсии по измерениям в узлах Гэста. Этот результат одновременно указывает на устойчивость интерполяционного процесса по узлам Чебышева относительно ошибок (например, ошибок округления) в значениях интерполируемой функции при увеличении степени интерполяции. Далее исследуются возможность идентификации функции $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ и скорость убывания среднеквадратичной ошибки по равноточным измерениям в узлах Чебышева, если априори известны лишь некоторые дифференциальные свойства $f(x)$. Такой подход позволяет получить априорную оценку необходимого количества измерений для восстановления $f(x)$ с заданной точностью без (обычного, но часто неоправданного) предположения, что восстанавливаемая функция является полиномом известной степени.

2. Пусть $p_m(x)$ — неизвестный полином степени m. Применяем для восстановления $p_m(x)$ по равноточным, некоррелированным измерениям $p_m(x)$ в точках x_i отрезка $[-1, +1]$

$$z_i = p_m(x_i) + n_i, \quad \mathbf{M}n_i = 0, \quad \mathbf{M}n_i n_k = \sigma^2\delta_{ik}, \tag{1}$$

метод воспроизводящих ядер, выбирая в качестве меры на $[-1, +1]$ меру

$$\xi(dx) = \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}. \tag{2}$$

Для этой меры известна квадратурная формула Эрмита [5]

$$\int_{-1}^{+1} q(x)\frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} q(x_i) \tag{3}$$

с $m+1$ узлами

$$x_i = -\cos\frac{2i+1}{2m+2}\pi \qquad (i = 0, 1, \ldots, m), \tag{4}$$

точная для полиномов степени $2m+1$. Так как коэффициенты формулы (3) равны между собой, то оценка $\hat{p}_m(x)$ метода воспроизводящих ядер, построенная на основании этой формулы, совпадает с оценкой наименьших квадратов [7]. Поэтому и вследствие того, что через $m+1$ точек можно провести полином степени m, эта оценка $\hat{p}_m(x)$ совпадает также с соответствующим интерполяционным полиномом.

Для построения оценки $\hat{p}_m(x)$ надо, кроме квадратурной формулы, иметь еще воспроизводящее ядро для полиномов степени m по мере (2) на $[-1, +1]$. Как известно, по этой мере на $[-1, +1]$ образуют ортогональную систему полиномы Чебышева

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Так как

$$\int_{-1}^{+1} T_k^2(x)\frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 1/2, & \text{если } k \geqslant 1, \end{cases} \tag{6}$$

то воспроизводящим ядром по рассматриваемой мере для полиномов степени m является ядро

$$K_m(x, y) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} T_k(x) T_k(y). \tag{7}$$

Это ядро может быть по формуле Кристоффеля—Дарбу представлено также в виде

$$K_m(x, y) = \frac{1}{2}\frac{T_m(x) T_{m+1}(y) - T_m(y) T_{m+1}(x)}{x - y}. \tag{8}$$

Искомой оценкой является теперь

$$\hat{p}_m(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} K_m(x, x_i) z_i, \tag{9}$$

и ее дисперсия выражается [7] в виде

$$\mathrm{D}\hat{p}_m(x) = \frac{\sigma^2}{m+1} K_m(x, x). \tag{10}$$

Полагаем в $K_m(x, x)$ $x = \cos\theta$. Тогда

$$K_m(x, x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m}\cos^2 k\theta = 1 + \sum_{k=1}^{m}(1 + \cos 2k\theta) =$$
$$= m + 1 + \sum_{k=1}^{m}\cos 2k\theta = \frac{2m+1}{2} + \frac{\sin(2m+1)\theta}{2\sin\theta} = \frac{2m+1}{2} + \frac{1}{2}U_{2m}(x), \tag{11}$$

где $U_{2m}(x)$ — ортогональный полином Чебышева второго рода со степенью $2m$. Так как для $U_{2m}(x)$ имеют место [8] оценки

$$|U_{2m}(x)| \leqslant 2m + 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1, \tag{12}$$

$$|U_{2m}(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < +1, \tag{13}$$

то

$$\mathrm{D}\hat{p}_m(x) \leqslant \frac{2m+1}{m+1}\sigma^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1, \tag{14}$$

$$\mathrm{D}\hat{p}_m(x) \leqslant \frac{\sigma^2}{2(m+1)}\left(2m + 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right), \quad -1 < x < +1. \tag{15}$$

3. Пусть теперь $f(x)$ — функция, имеющая p непрерывных производных на отрезке $[-1, +1]$, причем $f^{(p)}(x)$ удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица

$$|f^{(p)}(x) - f^{(p)}(y)| \leqslant M_p |x - y|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{16}$$

По теореме Джексона [5] тогда при $m > p$ для $f(x)$ существует полином $\pi_m(x)$ степени m такой, что на отрезке $[-1, +1]$

$$|f(x) - \pi_m(x)| \leqslant \frac{C_p M_p}{m^{p+\alpha}}, \quad C_p = \frac{12^{p+1} p^p (p+1)^{\alpha}}{p!}. \tag{17}$$

Предполагаем, что в узлах (4) можно повторить измерение $f(x)$ с некоррелированными ошибками, и рассмотрим кратность измерений непрерывной величиной, одинаковой для всех узлов. Тогда после N измерений имеем

$$z_i = f(x_i) + n_i, \quad \mathbf{M} n_i = 0, \quad \mathbf{M} n_i n_k = \frac{(m+1)\sigma^2}{N} \delta_{ik}. \tag{18}$$

Составим соответствующую оценку (9)

$$\hat{f}_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} K_m(x, x_i) z_i \tag{19}$$

и исследуем среднеквадратичную ошибку этой оценки. Очевидно,

$$\pi_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} K_m(x, x_i) \pi_m(x_i) \tag{20}$$

и поэтому

$$\begin{gathered} \mathbf{M}[f(x) - \hat{f}(x)]^2 = \mathbf{M}[(f(x) - \pi_m(x)) + (\pi_m(x) - \hat{f}(x))]^2 = \\ = \mathbf{M}\Bigl[(f(x) - \pi_m(x)) + \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} K_m(x, x_i)(\pi_m(x_i) - f(x_i)) - \\ - \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} K_m(x, x_i) n_i\Bigr]^2 = \Bigl[f(x) - \pi_m(x) + \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} K_m(x, x_i) \times \\ \times (\pi_m(x_i) - f(x_i))\Bigr]^2 + \frac{\sigma^2}{(m+1)N} \sum_{i=0}^{m} K_m^2(x, x_i). \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь по [7] и (11), (12)

$$\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} K_m^2(x, x_i) = K_m(x, x) \leqslant 2m + 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1 \tag{22}$$

и на основании известной оценки для фундаментальных полиномов Лагранжа при узлах Чебышева [5]

$$\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} |K_m(x, x_i)| \leqslant 8 + \frac{4}{\pi} \ln m. \tag{23}$$

Из (21) с помощью (17), (22) и (23) получаем

$$\mathbf{M}[f(x) - \hat{f}(x)]^2 \leqslant \left(9 + \frac{4}{\pi} \ln m\right)^2 \frac{C_p^2 M_p^2}{m^{2(p+\alpha)}} + \frac{2m+1}{N} \sigma^2. \tag{24}$$

Пусть $m > m_0$. Тогда

$$9 + \frac{4}{\pi} \ln m \leqslant A m^{\alpha}, \tag{25}$$

где

$$A = \max\left[\left(9 + \frac{4}{\pi} \ln m_0\right) / m_0^{\alpha},\ 4/\pi\alpha m_0^{\alpha}\right]. \tag{26}$$

Действительно, если A определено через (26) и $\varphi(m) = Am^{\alpha} - 9 - \frac{4}{\pi} \ln m$, то $\varphi(m_0) \geqslant 0$ и $\varphi'(m) = (\alpha\pi A m^{\alpha} - 4)/\pi m \geqslant 0$, так что $\varphi(m) \geqslant 0$ при $m \geqslant m_0$.

Применение (25) к (24) дает

$$\mathbf{M}[f(x) - \hat{f}(x)]^2 \leqslant \frac{A^2 C_p^2 M_p^2}{m^{2p}} + \frac{2m+1}{N} \sigma^2. \tag{27}$$

В случае фиксированного (но достаточно большого) N и при условии $p>0$ правая часть (27) имеет наименьшее значение при

$$m=\left(AC_pM_pp^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\left(\frac{N}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2p+1}}. \tag{28}$$

Для такого выбора m

$$\mathbf{M}[f(x)-\hat{f}(x)]^2\leqslant\frac{2p+1}{p^{2p/(2p+1)}}\left(AC_pM_p\right)^{\frac{2}{2p+1}}\cdot\left(\frac{\sigma^2}{N}\right)^{\frac{2p}{2p+1}}+\frac{\sigma^2}{N}. \tag{29}$$

Отметим, что правая часть (29) убывает при увеличении N со скоростью $N^{-\frac{2p}{2p+1}}$. При оценке полинома скорость убывания дисперсии равна N^{-1}. Уменьшение порядка скорости убывания среднеквадратичной ошибки при переходе от полиномов к дифференцируемым функциям, таким образом, при больших p незначительно. Менее желательно появление в правой части (29) постоянной условия Липшица M_p.

Если $p=0$, то оценка (27) слишком грубая для установления сходимости к нулю среднеквадратичной ошибки. Сходимость, однако, имеет место и в случае $p=0$, $\alpha>0$. В этом легко убедиться, применяя к оценке (24) неравенство, аналогичное (25), но с правой частью Bm^{β}, $0<\beta<\alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guest P. G., Ann. Math. Stat., **29**, 294 (1958).
2. Hoel P. G., Levine A., Ann. Math. Stat., **35**, 1553 (1964).
3. Kiefer J., Wolfowitz J., Ann. Math. Stat., **30**, 271 (1959).
4. Studden W. J., Ann. Math. Stat., **39**, 1435 (1968).
5. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М., 1949.
6. Петерсен И., Автоматика и телемеханика, № 6, 95 (1969).
7. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 403 (1969).
8. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/IV 1969

I. PETERSEN

IDENTIFITSEERIMINE VÕRDTÄPSETE MÕÕTMISTE JÄRGI TŠEBÕŠEVI PUNKTIDES

Taastavate tuumade meetodi [6, 7] ideed kasutades tuletatakse antud astmega polünoomi vähimruutude hinnangu avaldis ilmutatud kujul võrdtäpsete mõõtmiste puhul lõigu $[-1, +1]$ Tšebõševi punktides ning tõkked selle hinnangu dispersioonile samal lõigul. Antakse polünoomi vajaliku astme aprioorne hinnang funktsiooni $f(x)$, $f^{(p)}(x)\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$ identifitseerimiseks antud ruutkeskmise veaga. Näidatakse, et N võrdtäpse mõõtmisega on selline $f(x)$ lõigul $[-1, +1]$ identifitseeritav ruutkeskmise veaga, mis kahaneb kiirusega $O\left(\left(\frac{\sigma^2}{N}\right)^{p/(2p+1)}\right)$.

I. PETERSEN

IDENTIFICATION BASED ON MEASUREMENTS WITH EQUAL PRECISION IN THE TCHEBYCHEFF POINTS

The approach of the "reproducing kernels method" [6, 7] is used to obtain in explicit form the least squares estimator of a polynomial of a given degree based on measurements with equal precision in the Tchebycheff points of the interval $[-1, +1]$, and to find bounds for the dispersion of this estimator on $[-1, +1]$. An a priori estimate is given for the degree of the polynomial necessary for identifying the function $f(x)$ satisfying $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, with a given mean-square error. It is shown that, with N measurements of equal precision, such an $f(x)$ is identified on $[-1, +1]$ with a mean-square error decreasing as $O\left(\left(\frac{\sigma^2}{N}\right)^{p/(2p+1)}\right)$.