EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, Nr. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.4.02

*Г. КАНГРО*

# О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА БОРА—ХАРДИ ДЛЯ ЗАДАННОЙ СКОРОСТИ. II

В части I настоящей работы [1] введено понятие $A^\lambda$-суммируемости (т. е. $A$-суммируемости со скоростью $\lambda$) и изложен метод для нахождения множителей суммируемости класса $(A, A^\lambda)$, если $A$ — нормальный матричный метод суммирования. Этот метод применен к случаю, когда $A$ — метод взвешенных средних Рисса. В настоящей статье множители суммируемости класса $(A, A^\lambda)$ применяются к исследованию скорости $A$-суммируемости общих ортогональных рядов. Дано приложение к методу суммирования Чезаро целочисленного порядка.

## § 1. Множители суммируемости класса $(C_\alpha, C_\alpha^\lambda)$

Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел и $A$ — матричный метод суммирования. Сходящуюся последовательность $x = \{\xi_k\}$ с $\xi = \lim\limits_k \xi_k$ будем называть $\lambda$-сходящейся, если существует предел $\lim\limits_k \beta_k = \beta$, где

$$\beta_k = \lambda_k (\xi_k - \xi),$$

и $A^\lambda$-суммируемой, если последовательность $Ax$ окажется $\lambda$-сходящейся [1]. Нетрудно убедиться, что $\lambda$-сходимость превращается в обычную сходимость (и, следовательно, $A^\lambda$-суммируемость — в $A$-суммируемость) тогда и только тогда, когда последовательность $\lambda$ ограничена (в частности, если $\lambda_n = 1$ при $n = 0, 1, \ldots$). Числа $\varepsilon_n$ называются множителями суммируемости класса $(A, A^\lambda)$, коротко $\varepsilon_n \in (A, A^\lambda)$, если при каждом $A$-суммируемом ряде $\sum u_n$ ряд $\sum \varepsilon_n u_n$ является $A^\lambda$-суммируемым.

1. Пусть метод $A$ — нормальный и определяется преобразованием ряда в последовательность матрицей $(\alpha_{nk})$ с обратной матрицей $(\alpha'_{nk})$. При нахождении множителей суммируемости класса $(A, A^\lambda)$ основными являются следующие леммы (см. [1], с. 142).

Лемма 1. *Если нормальный метод $A$ удовлетворяет условию $\alpha_{n0} = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то $\varepsilon_n \in (A, A^\lambda)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1° $\exists \lim\limits_n \lambda_n (c_{nk} - c_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$

2° $\lambda_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |c_k| = O(1),$

3° $\lambda_n \sum\limits_{k=0}^{n} |c_{nk} - c_k| = O(1),$

где

$$c_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \alpha_{n\nu}\varepsilon_\nu \alpha'_{\nu k}, \qquad c_k = \lim_n c_{nk}. \tag{1}$$

Лемма 2. *Если метод $A$ регулярный и удовлетворяет условию $\alpha_{n0}=1$ $(n=0, 1, \ldots)$, то из соотношения $\varepsilon_n \in (A, A^\lambda)$ вытекают условия*

$$\exists \lim_n \lambda_n (1-\alpha_{nk})\varepsilon_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

$$\lambda_n \varepsilon_{n+1} = O(1). \tag{3}$$

Пусть $C_\alpha = (C, \alpha)$ — метод суммирования Чезаро, который в виде преобразования ряда в последовательность определяется нормальной матрицей с элементами

$$\alpha_{nk} = \frac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_n},$$

где $A^\alpha_n = \binom{n+\alpha}{n}$. Обозначив $a^\alpha_{nk} = 1 - \dfrac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_n}$, докажем для целых $\alpha$ следующую лемму, которая понадобится при применении условия (2) к методу Чезаро.

Лемма 3. *При $\alpha \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\frac{k}{n+1} \leqslant a_{nk} \leqslant \frac{k\alpha}{n+1} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n),$$

*причем*

$$\lim_n (n+1) a^\alpha_{nk} = k\alpha.$$

Доказательство. Предположим, что лемма верна при некотором значении $\alpha$. Тогда мы можем написать

$$a^\alpha_{nk} = \frac{k}{n+1} g^\alpha_{nk},$$

где

$$1 \leqslant g^\alpha_{nk} \leqslant \alpha, \quad \lim_n g^\alpha_{nk} = \alpha.$$

Отсюда, в силу легко проверяемого тождества

$$a^{\alpha+1}_{nk} = a^\alpha_{nk} + \frac{k}{n+1} \frac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_{n+1}},$$

вытекает

$$a^{\alpha+1}_{nk} = \frac{k}{n+1} g^{\alpha+1}_{nk},$$

где

$$g^{\alpha+1}_{nk} = g^\alpha_{nk} + \frac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_{n+1}}.$$

Так как

$$1 \leqslant g^{\alpha+1}_{nk} \leqslant \alpha+1, \qquad \lim_n g^{\alpha+1}_{nk} = \alpha+1,$$

то лемма верна и при $\alpha+1$. Поскольку лемма верна при $\alpha=1$, то доказательство завершено.

2. Применим леммы 1—3 к нахождению множителей суммируемости класса $(C_\alpha, C_\alpha^\lambda)$.

Теорема 1. *Если числа* $0 < \lambda_n \uparrow$ *удовлетворяют условию*

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} = O(n+1), \tag{4}$$

*то* $\varepsilon_n \in (C_\alpha, C_\alpha^\lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\exists \lim\limits_{n} \dfrac{\lambda_n}{n+1} \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$,

2° $\lambda_n \varepsilon_{n+1} = O(1)$,

3° $\lambda_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (k+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k| = O(1)$,

4° $\lambda_n \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha+1} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k| = O(n+1)$.

Доказательство. Поскольку для метода Чезаро $C_\alpha$ имеем (см. [2], с. 79)

$$\alpha'_{nk} = A_k A_{n-k}^{-\alpha-2},$$

то в случае $A = C_\alpha$ первая из формул (1) принимает вид

$$c_{nk} = A_k^\alpha \Delta_k^{\alpha+1} (\alpha_{nk} \varepsilon_k), \tag{5}$$

откуда, согласно второй из формул (1),

$$c_k = A_k^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k. \tag{6}$$

Необходимость. Пусть $\varepsilon_n \in (C_\alpha, C_\alpha^\lambda)$. Тогда условие 1° получаем из (2) с помощью леммы 3, а условие 2° — это условие (3). Необходимость условия 3° непосредственно вытекает из условия 2° леммы 1 и формулы (6) с помощью асимптотического равенства

$$A_k^\alpha \sim \frac{(k+1)^\alpha}{\alpha!}.$$

Для доказательства необходимости условия 4° покажем прежде всего, что из условий 2° и 3° вытекает

$$\lambda_n A_n \Delta\ \varepsilon_{n+1} = O(1) \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant \alpha). \tag{7}$$

Действительно, согласно известным леммам Андерсена (см. [2], с. 157—158), из условий $\varepsilon_n = O(1)$ и $\sum\limits_{k} A_k^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k| < \infty$ (вытекающих соответственно из условий 2° и 3°) при* $0 < \beta \leqslant \alpha$ следует

$$A_n^\beta \Delta^\beta \varepsilon_{n+1} = o(1), \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\beta-1} |\Delta^\beta \varepsilon_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k|. \tag{8}$$

С помощью преобразования Абеля в силу условий (8) легко установить тождество

$$A_n^\beta \Delta^\beta \varepsilon_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^\beta \Delta^{\beta+1} \varepsilon_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\beta-1} \Delta^\beta \varepsilon_k.$$

---

* При $\beta = 0$ условие (7) превращается в условие 2°.

Отсюда, ввиду второго из условий (8), а также условий 2° и 3°, и вытекает (7).

Применяя к (5) формулу разности произведения и учитывая, что

$$\Delta^{\nu} A_{n-k}^{\alpha} = A_{n-k}^{\alpha-\nu},$$

из формул (5) и (6) получаем

$$c_{nk} - c_k = T_0 + \sum_{\nu=1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\nu} T_{\nu}, \tag{9}$$

где

$$T_0 = -a_{nk}^{\alpha} A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k, \quad T_{\nu} = \frac{A_k^{\alpha} A_{n-k}^{\alpha-\nu}}{A_n^{\alpha}} \Delta^{\alpha+1-\nu} \varepsilon_{k+\nu} \quad (\nu > 0).$$

Ввиду (7) при $\nu > 0$ находим

$$|T_{\nu}| = \frac{A_k A_{n-k}^{\alpha-\nu}}{A_n} O\left( \frac{1}{\lambda_{k+\nu-1} A_{k+\nu-1}^{\alpha+\nu-1}} \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \frac{(k+1)^{\alpha} (n-k+1)^{\alpha-\nu}}{(n+1)^{\alpha}} \frac{1}{(k+\nu)^{\alpha-\nu+1}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \left(\frac{k+1}{k+\nu}\right)^{\alpha} \left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)^{\alpha-\nu} \left(\frac{k+\nu}{n+1}\right)^{\nu-1} \frac{1}{n+1} = O\left(\frac{1}{\lambda_k (n+1)}\right).$$

Отсюда и из предположения (4) следует

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} |T_{\nu}| = O(1) \quad (\nu > 0), \tag{10}$$

вследствие чего из равенства (9), в силу условия 3° леммы 1, вытекает

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^{\alpha} |A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k| = O(1).$$

На основе леммы 3 отсюда и получается необходимость условия 4°.

Достаточность. Пусть условия 1°—4° теоремы 1 выполнены. Покажем выполнимость условий 1°—3° леммы 1.

Из равенства (9) с помощью леммы 3 и условия 1° теоремы заключаем о выполнении условия 1° леммы 1, в то время как условие 2° леммы 1 переходит в условие 3° теоремы.

Из равенства (9) следует неравенство

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} |c_{nk} - c_k| \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} |T_0| + \sum_{\nu=1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\nu} \lambda_n \sum_{k=0}^{n} |T_{\nu}|.$$

Доказывая необходимость условия 4° теоремы, мы показали, что из условий 2° и 3° теоремы вытекает условие (7), а из него и предположения (4) — условие (10). Поэтому для доказательства выполнимости условия 3° леммы 1 достаточно показать, что

$$\lambda_n \sum_{k=1}^{n} |T_0| = O(1).$$

Но последнее соотношение непосредственно вытекает из условия 4° теоремы с помощью леммы 3.

Примечание 1. В частном случае $\lambda_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ условие 3° влечет за собой условие 4° и из теоремы 1 вытекает известная теорема Бора—Харди для метода Чезаро (см. [2], с. 147).

Примечание 2. Если $\lambda_n \uparrow \infty$ и $\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ сохраняет знак, то условия 3° и 4° теоремы 1 вытекают из условия (7). Действительно, применяя $\alpha$ раз к сумме

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \Delta\varepsilon_k$$

преобразование Абеля, находим

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k = \varepsilon_0 - \sum_{k=0}^{\alpha} A_n^{k} \Delta^{k} \varepsilon_{n+1},$$

откуда, ввиду условия (7) и $\lambda_n \uparrow \infty$, вытекает

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k = \sum_{k=0}^{\alpha} A_n^{k} \Delta^{k} \varepsilon_{n+1}.$$

Поскольку $\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ сохраняет знак, то из последнего равенства, ввиду условия (7), и следует условие 3°. Выполнение же условия 4° вытекает из тождества

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha+1} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha} \varepsilon_k - A_n^{\alpha+1} \Delta^{\alpha} \varepsilon_{n+1}$$

в силу условия (7) и предположения (4).

Примечание 3. При $\alpha = 0$, т. е при $C_\alpha = E$, где $E$ — метод сходимости, теорема 1 не верна, так как лемма 3 не справедлива для $\alpha = 0$. Поскольку в этом случае $\alpha_{nk} = 1$ при $k \leqslant n$, то формулы (1) дают

$$c_{nk} = \begin{cases} \Delta\varepsilon_k, & k \leqslant n \\ \varepsilon_n, & k = n, \end{cases} \qquad c_k = \Delta\varepsilon_k.$$

Из леммы 1 теперь без труда вытекает, что $\varepsilon_n \in (E, E^{\lambda})$ тогда и только тогда, когда

1° $\lambda_n \varepsilon_{n+1} = O(1)$,

2° $\lambda_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\Delta\varepsilon_k| = O(1)$.

При $\lambda_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ отсюда получается известная теорема Дедекинда—Адамара.

## § 2. О скорости суммируемости общих ортогональных рядов

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормальная система функций, определенных на отрезке $[a, b]$, а $A$ — регулярный матричный метод суммирования, преобразующий ряд

$$\sum_n a_n \varphi_n(t) \tag{11}$$

с вещественными коэффициентами $c_n$ в некоторую последовательность $\{\eta_n(t)\}$. Предположим, что числа $\varrho_n^2$, где $0 < \varrho_n \uparrow \infty$, представляют собой множители Вейля для $A$-суммируемости ряда (11) почти всюду на множестве $E \subset [a, b]$, т. е. ряд (11) $A$-суммируем почти всюду на $E$, если

$$\sum_n a_n^2 \varrho_n^2 < \infty.$$

Например, если $A$ — метод Чезаро положительного порядка, то, согласно известному результату Меньшова и Качмажа (см. [3], с. 132), для любой ортонормальной системы $\{\varphi_n\}$ можно положить $\varrho_n = \ln\ln n$, $E = [a, b]$.

1. Из теории общих ортогональных рядов известна следующая проблема. При каких условиях, налагаемых на последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}$ с $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, почти всюду на $E$ справедлива оценка

$$|\eta_n(t) - f(t)| = o_t\left(\frac{1}{\lambda_n}\right), \tag{12}$$

если

$$\sum_n a_n^2 \varrho_n^2 \lambda_n^2 < \infty,$$

где $f(t)$ — функция с интегрируемым квадратом, к которой ряд (11) сходится в среднем*? Для метода арифметических средних эту проблему изучили при $\varrho_n = \ln\ln n$ Медер [4] и Тандори [5], а при более общих $\varrho_n$ — Алексич и Кралик [6]. Более общие результаты получили Лейндлер [7] для метода взвешенных средних Рисса и Ефимов [8] для треугольных методов $A$ с

$$a_{nk} = \psi\left(\frac{k}{n+1}\right),$$

где функция $\psi$ удовлетворяет некоторым определенным условиям. При этом Алексич и Кралик воспользовались методами общей теории рядов, а остальные авторы — классическими методами теории общих ортогональных рядов. Следующая теорема обобщает метод Алексича и Кралика на случай произвольного регулярного матричного метода $A$.

Теорема 2. *Пусть числа* $\varrho_n^2$ *— множители Вейля для* $A$*-суммируемости ряда* (11) *почти всюду на множестве* $E \subset [a, b]$. *Если числа* $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ *такие, что*

$$\sum_n a_n^2 \varrho_n^2 \lambda_n^2 < \infty \tag{13}$$

*и* $\frac{1}{\lambda_n} \in (A, A^\lambda)$, *то почти всюду на* $E$ *существует предел*

$$\lim_n \lambda_n[\eta_n(t) - f(t)] = \gamma(t), \tag{14}$$

*где* $\{\eta_n(t)\}$ *—* $A$*-преобразование ряда* (11), *а* $f(t)$ *— функция с интегрируемым квадратом, к которой ряд* (11) *сходится в среднем.*

Доказательство. Поскольку $\varrho_n^2$ — множители Вейля для $A$-суммируемости почти всюду ряда (11), то, в силу (13), ряд

$$\sum_n a_n \lambda_n \varphi_n(t)$$

$A$-суммируем почти всюду на $E$. Так как $\frac{1}{\lambda_n} \in (A, A^\lambda)$, то ряд (11) является $A^\lambda$-суммируемым почти всюду на $E$, т. е. почти всюду на $E$ существует предел

$$\lim_n \lambda_n[\eta_n(t) - \eta(t)],$$

где $\eta(t) = \lim_n \eta_n(t)$. Но поскольку ряд (11) сходится в среднем к функции $f(t)$, а метод $A$ регулярен, то и последовательность $\{\eta_n(t)\}$ сходится в среднем к функции $f(t)$ (см., напр., [9], с. 116). По теореме Рисса существует подпоследовательность $\{n_{\nu_n}(t)\}$ последовательности $\{\eta_n(t)\}$,

* Согласно теореме Рисса—Фишера.

сходящаяся к $f(t)$ почти всюду на $E$. Поэтому $\eta(t)=f(t)$ почти всюду на $E$, и теорема доказана.

Отметим, что условие $\frac{1}{\lambda_n}\in(A, A^\lambda)$ достаточно, но не необходимо для справедливости утверждения теоремы 2. Действительно, пусть $A$ — метод арифметических средних и $\lambda_0=1$, $\lambda_n=K^\nu$ $(1<K<2)$, если $2^{\nu-1}\leqslant n<2^\nu$ $(n=1, 2, \ldots)$. Согласно одной теореме Лейндлера (см. [7], теор. II), справедлива оценка (12). Но

$$\frac{1}{\lambda_n}\overline{\in}(A, A^\lambda),$$

поскольку при $\beta=1$ условие (7) не выполнено, если

$$\varepsilon_n=\frac{1}{\lambda_n}.$$

2. Пусть последовательность $\lambda=\{\lambda_n\}$ с $0<\lambda_n\uparrow\infty$ такая, что *

$$\Delta^\nu\lambda_n\leqslant 0 \qquad (1\leqslant\nu\leqslant\alpha+1), \tag{15}$$

и числа

$$\delta_n=\lambda_n(n+1)^{-\gamma} \qquad (0<\gamma<1)$$

удовлетворяют условиям

$$\Delta^\nu\delta_n\geqslant 0 \qquad (1\leqslant\nu\leqslant\alpha). \tag{16}$$

Используя теорему 1, покажем, что

$$\frac{1}{\lambda_n}\in(C_\alpha, C_\alpha^\lambda).$$

В [1] показано, что при $\lambda_n=(n+1)^\gamma$ $(0<\gamma<1)$ метод арифметических средних $\lambda$-консервативен. Отсюда следует выполнимость предположения (4) теоремы 1 при $\lambda_n=(n+1)^\gamma$ $(0<\gamma<1)$. Ввиду (16) последовательность $\{\delta_n\}$ монотонно убывает. Поэтому предположение (4) выполняется и при $\lambda_n=\delta_n(n+1)^\gamma$.

Выполнение условий 1° и 2° теоремы 1 проверяется непосредственно. Для проверки выполнимости условий 3° и 4° согласно примечанию 2 достаточно показать, что $\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n\geqslant 0$ $(n=0, 1, \ldots)$ и условие (7) выполнено.

Поскольку при $\varepsilon_n=\frac{1}{\lambda_n}$ имеем

$$\Delta\varepsilon_n=-\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n\lambda_{n+1}},$$

то справедливо равенство

$$\Delta^{\beta+1}\varepsilon_n=-\sum_{\nu=0}^{\beta}\binom{\beta}{\nu}\Delta^{\nu+1}\lambda_n\cdot\Delta^{\beta-\nu}\frac{1}{\lambda_{n+\nu}\lambda_{n+\nu+1}}=$$

$$=-\sum_{\nu=0}^{\beta}\binom{\beta}{\nu}\Delta^{\nu+1}\lambda_n\sum_{\mu=0}^{\beta-\nu}\binom{\beta-\nu}{\mu}\Delta^\mu\frac{1}{\lambda_{n+\nu}}\cdot\Delta^{\beta-\nu-\mu}\frac{1}{\lambda_{n+\nu+1+\mu}},$$

откуда, в силу соотношений (15), методом индукции получается

$$\Delta^\beta\varepsilon_n\geqslant 0 \qquad (1\leqslant\beta\leqslant\alpha+1).$$

* Например, если $\lambda_n=\ln(n+3)$, то условие (15) выполнено при всех $\nu\geqslant 1$.

Аналогично из (16) вытекает

$$\Delta^{\beta}\frac{1}{\delta_n} \leqslant 0 \qquad (1 \leqslant \beta \leqslant \alpha)$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant \Delta^{\beta}\varepsilon_n = \Delta^{\beta}\frac{1}{\delta_n (n+1)^{\gamma}} = \sum_{\nu=0}^{\beta}\binom{\beta}{\nu}\Delta^{\nu}\frac{1}{\delta_n}\cdot\Delta^{\beta-\nu}\frac{1}{(n+1+\nu)^{\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta_n}\Delta^{\beta}\frac{1}{(n+1)^{\gamma}} = \frac{1}{\delta_n} O\left(\frac{1}{(n+1)^{\gamma+\beta}}\right),$$

откуда следует выполнение условия (7). Тем самым доказано, что $\frac{1}{\lambda_n} \in (C_\alpha, C_\alpha^\lambda)$ при соблюдении условий (15) и (16).

Для применения теоремы 2 вычислим предел $\gamma(t)$, определенный формулой (14). Согласно формуле (10) из [1], почти всюду на $E$ имеем *

$$\gamma(t) = \sum_k \alpha_k \beta_k + \lim_n \lambda_n \Big(\sum_{k=0}^{n} c_{nk} - c\Big)\xi,$$

$$\alpha_k = \lim_n \lambda_n (c_{nk} - c_k), \qquad c = \lim_n \sum_{k=0}^{n} c_{nk},$$

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} a_k \lambda_k \varphi_k(t).$$

Поскольку

$$\lim_n \frac{\lambda_n}{n+1} = \lim_n \delta_n = 0,$$

то по формуле (9) с помощью леммы 3 находим $\alpha_k = 0$. Но, согласно формуле (18) из [1], имеем

$$\sum_{k=0}^{n} c_{nk} - c = 0$$

и, следовательно, $\gamma(t) = 0$ почти всюду на $E$. Тем самым мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\varrho_n^2$ — множители Вейля для $C_\alpha$-суммируемости ряда* (11) *почти всюду на множестве $E \subset [a, b]$. Если $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\Delta^{\nu}\lambda_n \leqslant 0$ $(1 \leqslant \nu \leqslant \alpha + 1)$ и числа $\delta_n = \lambda_n (n+1)^{-\gamma}$ $(0 < \gamma < 1)$ удовлетворяют условиям*** $\Delta^{\nu}\delta_n \geqslant 0$ $(1 \leqslant \nu \leqslant \alpha)$, *то при условии*

$$\sum_n a_n^2 \varrho_n^2 \lambda_n^2 < \infty$$

*почти всюду на $E$ справедлива оценка* (12), *где $\eta_n(t)$ — средние Чезаро порядка $\alpha$ для ряда* (11), *а $f(t)$ — функция с интегрируемым квадратом, к которой ряд* (11) *сходится в среднем на $E$.*

При $\alpha = 1$ теорема 3 сводится к упомянутой выше теореме Алексича и Кралика [6].

Легко установить, что из примечания 3 следует $\frac{1}{\lambda_n} \in (E, E^\lambda)$. Отсюда вытекает, что теорема 3 справедлива и при $\alpha = 0$.

---

* В данном случае $\beta = \lim_k \beta_k = \lim_k (\xi_k - \xi) = 0$ почти всюду на $E$.

** Достаточно требовать выполнения условий $\Delta^{\nu}\delta_n \geqslant 0$ $(1 \leqslant \nu \leqslant \alpha)$ для всех $n \geqslant n_0$ при некотором $n_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 137 (1969).
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.
3. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1963.
4. Meder J., Ann. Polon. Math., **4**, 183 (1957/58).
5. Tandori K., Acta Scient. Math., **20**, 19 (1959).
6. Alexits G., Kralik D., Acta Math. Acad. Scient. Hung., **11**, 387 (1960).
7. Leindler L., Acta Scient. Math., **24**, 129 (1963).
8. Ефимов А. В., Успехи матем. наук, **22**, 119 (1967).
9. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Сер. техн. и физ.-матем. наук, **5**, 108 (1956).

*Тартуский государственный университет*

Поступила в редакцию 12/VII 1968

*G. KANGRO*

**BOHRI-HARDY TÜÜPI SUMMEERUVUSTEGUREIST ANTUD KIIRUSE PUHUL. II**

Olgu $A$ mingi maatriksmenetlus. Jada $x$ nimetame $A^\lambda$-summeeruvaks, kui jada $Ax$ koondub kiirusega $\lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow)$. Leiti tarvilikud ja piisavad tingimused $(A, A^\lambda)$ tüüpi summeeruvustegurite jaoks juhul, kui $A$ on Cesàro menetlus $(C, \alpha)$. Rakendusena uuriti üldiste ortogonaalridade summeeruvuse kiirust.

*G. KANGRO*

**ON THE SUMMABILITY FACTORS OF THE BOHR-HARDY TYPE FOR A GIVEN RAPIDITY. II**

Let $A$ be a matrix summability method. The sequence $x$ is called $A^\lambda$-summable if the sequence $Ax$ converges with the rapidity $\lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow)$. Necessary and sufficient conditions for summability factors of the type $(A, A^\lambda)$ are found, $A$ being the Cesàro method $(C, \alpha)$. As an application, the rapidity of the summability of general orthogonal series is studied.