

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.4.16>

А. ШПИЛЕВСКИЙ

ТЕОРЕМА ОБ ОБОБЩЕННЫХ ТОЖДЕСТВАХ В n -МЕРНОМ ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯA. SPILEVSKI. TEOREEM ÜLDISTATUD SAMASTUSTEST N -MÕOTMELISES TASASES RUUMIS JA NENDE INTERPRETATSIOONA. SHPILEVSKI. THEOREM OF GENERALIZED IDENTITIES IN AN N -DIMENSIONAL PLANE SPACE AND THEIR INTERPRETATION

Известные тождества Якоби $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ в случае алгебры Ли группы $O(3)$ переписываются через структурные константы группы в виде $\epsilon_{ijl} \epsilon_{klm} + \epsilon_{ikl} \epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil} \epsilon_{ilm} = 0$. Это последнее и другие аналогичного типа (см. ниже) тождества легко обобщаются и доказываются для n -мерного плоского пространства, если воспользоваться давно разработанной Вебленом [1] техникой обобщенных символов Кронеккера $\delta_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_m} \equiv \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_m})}{\partial(x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_m})}$. Все результаты, полученные нами, удобно представить в форме следующей теоремы:

Теорема. В каждом n -мерном Евклидовом (и псевдоевклидовом с любым числом мнимых координат) пространстве существует $n-1$ независимых тождеств $(T_m) = 0$, $2 \leq m \leq n$ вида

$$(T_m) = \delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} - \sum_{k=1}^m \delta_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_m}^{j_1 \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_m} = 0.$$

Доказательство легко осуществляется методом математической индукции, ибо случай $(T_2) = 0$ легко проверяется непосредственно, а, постулируя $(T_m) = 0$, доказать $(T_{m+1}) = 0$ можно либо методом от противного (воспользовавшись формулой $\delta_{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_k}^{j_1 \dots j_m j_{m+1} \dots j_k} = \frac{(n-m)!}{(n-k)!} \delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m}$; см. [1]), либо явным методом, используя формулу

$$\delta_{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_n}^{j_1 \dots j_m j_{m+1} \dots j_n} = \delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} \delta_{i_{m+1} \dots i_n}^{j_{m+1} \dots j_n} \sum_{k=1}^m (-1)^{mk} \delta_{i_{k+1} \dots i_m i_{m+1} \dots i_n}^{j_{k+1} \dots j_m j_{m+1} \dots j_n} \delta_{i_k}^{j_k}. \quad (1)$$

Весь смысл и вся ценность случайно найденных тождеств $(T_m) = 0$ — в их интерпретации. Дадим теперь интерпретацию некоторых из них.

а) Случай $(T_n) = 0$. Если воспользоваться символами Леви-Чевиты $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n} = \delta_{1 2 \dots n}^{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и представлением обобщенного символа Кронеккера в форме (см. [1])

$$\delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} = \frac{1}{(n-m)!} \epsilon^{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_m i_{m+1} \dots i_n} \quad (2)$$

то, переписав $(T_n) = 0$ в виде $\epsilon_{i_1 \dots j_n} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} - \sum_{k=1}^n \epsilon_{j_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots j_n} \epsilon^{j_1 i_2 \dots i_n} = 0$ и свернув это последнее выражение с $\epsilon_{a i_2 \dots i_n}$, найдем после небольших преобразований и замены $i_1 \equiv j_{n+1}$

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} \delta_{j_{n+1}}^a + \sum_{k=1}^n (-1)^{nk} \epsilon_{j_{k+1} \dots j_n j_{n+1} i_1 \dots i_{k-1}} \delta_{j_k}^a = 0. \quad (3)$$

Мы получили n -мерный вариант того тождества, которое для $n=4$ применяется с успехом и принципиальным значением, например, в [2], а для $n=3$ используется, например, в лекциях В. Огиевского [3]. Тождество (3) легко и очевидно интерпретируется геометрически. Между прочим, (3) следует прямо из (1), если там положить $m=n$ и использовать (2).

б) Случай $(T_3) = 0$. Для интерпретации $(T_3) = 0$ удобно использовать формулу в виде

$$\delta_{ijk}^{pmm} = \delta_{ij}^{pm} \delta_k^n + \delta_{ij}^{np} \delta_k^m + \delta_{ij}^{mn} \delta_k^p = \delta_{ij}^{ps} \delta_{sk}^{mn} + \delta_{ij}^{mn} \delta_k^p. \quad (4)$$

Теперь берем $(T_3) = 0$ в виде $\delta_{ijk}^{pmm} - \delta_{ijp}^{kmn} = \delta_{pjk}^{imn} + \delta_{pk}^{jmn}$, которое после использования сначала (4) и приведения подобных членов, а затем тождества $(T_2) = 0$ и снова (4) примет вид * $\delta_{ij}^{ps} \delta_{mn}^{sk} - \delta_{mn}^{ps} \delta_{ij}^{sk} = \delta_{ijb}^{mna} \delta_{ab}^{pk}$. Если теперь ввести эрмитовы матрицы E_{kl} с элементами $(E_{kl})_{ij} = i \delta_{kl}^{ij}$, то последний вид $(T_3) = 0$ окончательно будет выглядеть в записи через матрицы E_{kl} так:

$$[E_{ij}, E_{mn}] = -i \delta_{ijb}^{mna} E_{ab} = i(\delta_{im} E_{jn} + \delta_{jn} E_{im} - \delta_{in} E_{jm} - \delta_{jm} E_{in}). \quad (5)$$

Такая форма записи немедленно требует интерпретировать $(T_3) = 0$ как матричную запись коммутационных соотношений для генераторов вращений E_{kl} в n -мерном пространстве, вид которых обычно постулируется [4, 5], а у нас они появляются естественно, как следствие доказанной теоремы.

в) Случай $(T_2) = 0$. Это тождество с учетом (2) для $n=3$ автоматически дает тождество Якоби в записи через структурные константы группы $O(3)$. Отметим, кстати, что для трехмерного пространства обычно принято брать в качестве генераторов вращений не генераторы E_{kl} , указывающие плоскость вращения, а дуальные к E_{kl} генераторы $A_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} E_{kl}$, указывающие ось вращения. Поэтому, сворачивая (5) с $\frac{1}{4} \epsilon_{kij} \epsilon_{lmn}$, мы легко получаем вместо не употребляемых в случае вращений в трехмерном пространстве коммутационных соотношений (5) обычные коммутационные соотношения $[A_k, A_l] = i \epsilon_{klj} A_j$, известные как произведение Ли в алгебре Ли группы $O(3)$.

В заключение автор сердечно благодарит проф. П. Карда, М. Кыйва и Я. Лыхмуса за полезное обсуждение работы.

* В силу выбранной нами метрики с однозначной сигнатурой допустима и используется взаимоперестановочность всех верхних индексов со всеми нижними индексами, ибо верхние и нижние индексы эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веблен О., Инварианты дифференциальных квадратичных форм, М., ИЛ, 1948
2. Rosenberg L., Phys. Rev., **129**, 2786 (1963).
3. Огневский В. И., 11 летняя школа по проблемам элементарных частиц, Отея, 1967, Тарту, 1968 (в печати).
4. Salam A., In: Summer Institute for Theor. Physics, Boulder, Colorado, 1959. N. Y., 1960.
5. Kihlberg A., Arkiv füs., **30**, 121 (1965).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/V 1968

SISUKORD

J. Rebane. Universaalsete algebrate esitamist kahepoolse taandamisega ja taandamisega kommutatiivsetes poolrühmades. <i>Resümee</i>	378
O. Vaarmann. Mõnedest iteratsioonimeetodeist pöördoperaatori järkjärgulise aproksimeerimisega. <i>Resümee</i>	390
A. Siimon. Signaalide eksisteerimise ajakoordinaatide määramine loogiliste skeemide analüütilise kirjeldamise keeles. <i>Resümee</i>	400
H. Iher, N. Kristoffel. Võre moonutusest Ce^{3+} - ja Eu^{3+} -ga kuubiliste tsentrite poolt CaF_2 -s. <i>Resümee</i>	405
A. Aidla, J. Kirs. Infrapunased nähtused äärekiirgusega CdS kristallides. <i>Resümee</i>	418
R. Allikas. Energeetilised protsessid staatilistes ferromagnetilistes sageduse kordistites. <i>Resümee</i>	425
A. Sügis, M. Alla. Magnetvälja fluktuatsioonid ja resonantstingimuse stabiliseerimine TMTR-spektromeetrites. <i>Resümee</i>	432
J. Ivanov, V. Zlobin. Üherealine ümarate jugade süsteem piiratud ristvooluses. <i>Resümee</i>	441
V. Selg. Küttepinde gaasidepoolne saastumine. <i>Resümee</i>	448
V. Hendrikson. Segunemisprotsessid ristvooluses levivas ümaras jaos. <i>Resümee</i>	457
V. Press, A. Ots. Tolmpõlvkivi põlemisprotsess lahtises leegis. <i>Resümee</i>	465
V. Press. Põlevate osakeste liikumine ja lendainete eraldumise dünaamika tolmpõlvkivi põlemisel lahtises leegis. <i>Resümee</i>	474

LÜHIUURIMUSI

E. Kundla. Tuumne magnetiline kolmikresonants ühe tugeva raadiosagedusvälja puhul. <i>Resümee</i>	475
J. Lõhmus. Simplektiliste rühmade kontraktsioonid. <i>Resümee</i>	479
J. Lõhmus. Kontraktsioonide üldistamise võimalustest algebraliste süsteemide jaoks. <i>Resümee</i>	481
A. Spilevski. Teoreem üldistatud samastustest n -mõõtmelises tasases ruumis ja nende interpretatsioon. <i>Resümee</i>	484