EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.4.16

А. ШПИЛЕВСКИЙ

ТЕОРЕМА ОБ ОБОБЩЕННЫХ ТОЖДЕСТВАХ В n-МЕРНОМ ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

A. SPILEVSKI. TEOREEM ÜLDISTATUD SAMASTUSTEST N-MÕÕTMELISES TASASES RUUMIS JA NENDE INTERPRETATSIOON

A. SHPILEVSKI. THEOREM OF GENERALIZED IDENTITIES IN AN N-DIMENSIONAL PLANE SPACE AND THEIR INTERPRETATION

Известные тождества Якоби $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$ в случае алгебры Ли группы $O(3)$ переписываются через структурные константы группы в виде $\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}+\epsilon_{ikl}\epsilon_{lim}+\epsilon_{kil}\epsilon_{jlm}=0$. Это последнее и другие аналогичного типа (см. ниже) тождества легко обобщаются и доказываются для n-мерного плоского пространства, если воспользоваться давно разработанной Вебленом [1] техникой обобщенных символов Кронеккера $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_m}_{j_1 j_2 \ldots j_m}=\frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_m})}{\partial(x^{j_1}, x^{j_2}, \ldots, x^{j_m})}$. Все результаты, полученные нами, удобно представить в форме следующей теоремы:

Теорема. В каждом n-мерном Евклидовом (и псевдоевклидовом с любым числом мнимых координат) пространстве существует $n-1$ независимых тождеств $(T_m)=0$, $2\leqslant m\leqslant n$ вида

$$(T_m)\equiv\delta^{i_1\ldots i_m}_{i_1\ldots i_m}-\sum_{k=1}^{m}\delta^{j_k i_2 i_3 \ldots\ldots\ldots\ldots i_m}_{j_1\ldots j_{k-1} i_1 j_{k+1}\ldots j_m}=0.$$

Доказательство легко осуществляется методом математической индукции, ибо случай $(T_2)=0$ легко проверяется непосредственно, а, постулируя $(T_m)=0$, доказать $(T_{m+1})=0$ можно либо методом от противного (воспользовавшись формулой $\delta^{i_1\ldots i_m i_{m+1}\ldots i_k}_{j_1\ldots j_m i_{m+1}\ldots i_k}=\frac{(n-m)!}{(n-k)!}\delta^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_m}$; см. [1]), либо явным методом, используя формулу

$$\delta^{i_1\ldots i_m i_{m+1}}_{j_1\ldots j_m j_{m+1}}=\delta^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_m}\delta^{i_{m+1}}_{j_{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{mk}\delta^{i_1 i_2\ldots\ldots\ldots\ldots i_m}_{j_{k+1}\ldots j_m j_{m+1} j_1\ldots j_{k-1}}\delta^{i_{m+1}}_{j_k}. \qquad (1)$$

Весь смысл и вся ценность случайно найденных тождеств $(T_m)=0$ — в их интерпретации. Дадим теперь интерпретацию некоторых из них.

а) Случай $(T_n)=0$. Если воспользоваться символами Леви-Чевиты $\epsilon_{j_1 j_2\ldots j_n}\equiv\delta^{1\,2\ldots n}_{j_1 j_2\ldots j_n}=\delta^{j_1 j_2\ldots j_n}_{1\,2\ldots n}\equiv\epsilon^{j_1 j_2\ldots j_n}$ и представлением обобщенного символа Кронеккера в форме (см. [1])

$$\delta^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m} = \frac{1}{(n-m)!} \epsilon^{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_m i_{m+1} \dots i_n}, \tag{2}$$

то, переписав $(T_n) = 0$ в виде $\epsilon_{j_1 \dots j_n} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_{j_1 \dots j_{k-1} i_1 j_{k+1} \dots j_n} \epsilon^{j_k i_2 \dots i_n} = 0$ и свернув это последнее выражение с $\epsilon_{a i_2 \dots i_n}$, найдем после небольших преобразований и замены $i_1 = j_{n+1}$

$$\epsilon_{j_1 \dots j_n} \delta^a_{j_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{nk} \epsilon_{j_{k+1} \dots j_n j_{n+1} j_1 \dots j_{k-1}} \delta^a_{j_k} = 0. \tag{3}$$

Мы получили n-мерный вариант того тождества, которое для $n = 4$ применяется с успехом и принципиальным значением, например, в [2], а для $n = 3$ используется, например, в лекциях В. Огиевецкого [3]. Тождество (3) легко и очевидно интерпретируется геометрически. Между прочим, (3) следует прямо из (1), если там положить $m = n$ и использовать (2).

б) С л у ч а й $(T_3) = 0$. Для интерпретации $(T_3) = 0$ удобно использовать формулу в виде

$$\delta^{pmn}_{ijk} = \delta^{pm}_{ij} \delta^{n}_{k} + \delta^{np}_{ij} \delta^{m}_{k} + \delta^{mn}_{ij} \delta^{p}_{k} = \delta^{ps}_{ij} \delta^{mn}_{sk} + \delta^{mn}_{ij} \delta^{p}_{k}. \tag{4}$$

Теперь берем $(T_3) = 0$ в виде $\delta^{pmn}_{ijk} - \delta^{kmn}_{ijp} = \delta^{imn}_{pjk} + \delta^{jmn}_{ipk}$, которое после использования сначала (4) и приведения подобных членов, а затем тождества $(T_2) = 0$ и снова (4) примет вид* $\delta^{ps}_{ij} \delta^{sk}_{mn} - \delta^{ps}_{mn} \delta^{sk}_{ij} = \delta^{mna}_{ijb} \delta^{pk}_{ab}$. Если теперь ввести эрмитовые матрицы E_{kl} с элементами $(E_{kl})_{ij} = i\delta^{ij}_{kl}$, то последний вид $(T_3) = 0$ окончательно будет выглядеть в записи через матрицы E_{kl} так:

$$[E_{ij}, E_{mn}]_{-} = -i\delta^{mna}_{ijb} E_{ab} = i(\delta_{im} E_{jn} + \delta_{jn} E_{im} - \delta_{in} E_{jm} - \delta_{jm} E_{in}). \tag{5}$$

Такая форма записи немедленно требует интерпретировать $(T_3) = 0$ как матричную запись коммутационных соотношений для генераторов вращений E_{kl} в n-мерном пространстве, вид которых обычно постулируется [4, 5], а у нас они появляются естественно, как следствие доказанной теоремы.

в) С л у ч а й $(T_2) = 0$. Это тождество с учетом (2) для $n = 3$ автоматически дает тождество Якоби в записи через структурные константы группы $O(3)$. Отметим, кстати, что для трехмерного пространства обычно принято брать в качестве генераторов вращений не генераторы E_{kl}, указывающие плоскость вращения, а дуальные к E_{kl} генераторы $A_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} E_{kl}$, указывающие ось вращения. Поэтому, сворачивая (5) с $\frac{1}{4} \epsilon_{kij} \epsilon_{lmn}$, мы легко получаем вместо не употребляемых в случае вращений в трехмерном пространстве коммутационных соотношений (5) обычные коммутационные соотношения $[A_k, A_l]_{-} = i \epsilon_{klj} A_j$, известные как произведение Ли в алгебре Ли группы $O(3)$.

В заключение автор сердечно благодарит проф. П. Карда, М. Кыйва и Я. Лыхмуса за полезное обсуждение работы.

---

* В силу выбранной нами метрики с однозначной сигнатурой допустима и используется взаимоперестановочность всех верхних индексов со всеми нижними индексами, ибо верхние и нижние индексы эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веблен О., Инварианты дифференциальных квадратичных форм, М., ИЛ, 1948
2. Rosenberg L., Phys. Rev., **129**, 2786 (1963).
3. Огиевецкий В. И., II летняя школа по проблемам элементарных частиц, Отепя, 1967, Тарту, 1968 (в печати).
4. Salam A., In: Summer Institute for Theor. Physics, Boulder, Colorado, 1959, N. Y., 1960.
5. Kihlberg A., Arkiv füs., **30**, 121 (1965).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/V 1968

SISUKORD

LÜHIUURIMUSI