где A, B, C — квадратные матрицы порядка m, B, C — симметрические. Сжатие относительно этой неполупростой подалгебры ведет к алгебре, в которой последние коммутаторы (2) равны нулю, т. е. результат такой же, как и при сжатии относительно подалгебры $GL(m, R)$. Более интересные случаи сжатий получаются относительно неполупростых подгрупп, для которых вырожденное подпространство выбрано иначе.

ЛИТЕРАТУРА

1. İnönü E., Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **39**, 510 (1953).
2. Лыхмус Я., II летняя школа по проблемам теории элементарных частиц, Отепя, 1967, ч. 4, Тарту, 1968, с. 1—132.
3. Rosen J., Nuovo Cimento, **B 46**, 1 (1966).
4. Gourdin M., Unitary symmetries and their application to high energy physics, Amsterdam, 1967.
5. Розенфельд Б. А., Карпова Л. М., Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, **13**, 168 (1966).
6. Дынкин Е. Б., Матем. сб., **30** (72), 349 (1952).
7. Кантор И. Л., Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, **13**, 310 (1966).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/V 1968

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.4.15

Я. ЛЫХМУС

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

J. LÕHMUS. KONTRAKTSIOONIDE ÜLDISTAMISE VÕIMALUSTEST ALGEBRALISTE SÜSTEEMIDE JAOKS

J. LÕHMUS. SOME POSSIBILITIES FOR GENERALIZATION OF CONTRACTION PROCEDURE FOR ALGEBRAIC SYSTEMS

Не исключено, что в физике элементарных частиц могут иметь некоторое значение не только группы, выражающие симметрию динамических систем, но и другие алгебраические системы, может быть более явно и прямо связанные с динамикой. В физике симметрий в последнее время непрестанно повышается внимание к предельным переходам [1], отражающим предельные соотношения между физическими теориями или между динамическими ситуациями [2]. Цель настоящей заметки — обратить внимание на возможность предельных переходов не только между группами Ли (алгебрами Ли), но и между другими алгебраическими системами.

Алгебраическими системами, для которых имеют смысл вложения [3] и предельные переходы в алгебры Ли, прежде всего являются *алгебры Йордана* [4, 5], более общие неассоциативные алгебры [6] и *алгебры Мальцева* [7]. *Исключительная алгебра Йордана* M_3^8 [8, 9] тесно связана с октонионами (числами Кэли [10]. Мы здесь не предлагаем сколько-нибудь полную и общую теорию, а ограничимся только примером предельного перехода $M_3^8 \to U(3)$, после чего приведем некоторые соображения, касающиеся предельных переходов из более общей неассоциативной алгебры в алгебру Ли (а также из алгебры Мальцева в алгебру Ли).

Алгебры Йордана (в дальнейшем J-алгебры) являются по существу матричными алгебрами (т. е. состоящими из матриц с комплексными элементами) с новой неассоциативной операцией умножения

$$A \cdot B = \tfrac{1}{2}(AB + BA) \tag{1}$$

(специальные J-алгебры), кроме одной — исключительной J-алгебры M_3^8, которую можно представить как совокупность «эрмитовых октонионных матриц» вида

$$M = \begin{pmatrix} a & X & Y \\ \overline{X} & b & Z \\ \overline{Y} & \overline{Z} & c \end{pmatrix} \tag{2}$$

с той же операцией (1). Здесь a, b, c — вещественные числа, X, Y, Z — октонионы, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ — сопряженные октонионы. Введем «ε-преобразованный» общий вид октонионов:

$$\begin{aligned} X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 \varepsilon e_2 + x_3 \varepsilon e_3 + \\ + x_4 \varepsilon \eta e_4 + x_5 \varepsilon \eta e_5 + x_6 \varepsilon \eta e_6 + x_7 \varepsilon \eta e_7. \end{aligned} \tag{3}$$

При $\varepsilon \to 0$ октонионы с конечными коэффициентами превращаются в комплексные числа, при $\eta \to 0$ — в кватернионы. Можно фиксировать начальные значения $\varepsilon = \eta = 1$.

Этот предельный переход в J-алгебре M_3^8 не дает еще алгебру Ли — вид операции (1) не изменяется и в пределе получается специальная J-алгебра. Для перехода к алгебрам Ли алгебру M_3^8 следует рассматривать как *мутацию* [3] обычной матричной алгебры* с новой операцией

$$A \divideontimes B = \cos\alpha [A, B] + \sin\alpha \{A, B\}, \tag{4}$$

где $\{A, B\} = \frac{1}{2}[A, B]_+$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При $\varepsilon \to 0$, $\alpha \to 0$ в пределе получается алгебра $U(3)$, а при $\eta \to 0$, $\alpha \to 0$ — алгебра эрмитовых кватернионных матриц третьего порядка.

Из более общих неассоциативных алгебр самыми удобными для формулировки предельного перехода оказываются неассоциативные (λ, μ)-*мутации* [3] ассоциативных или неассоциативных алгебр (с операцией AB) с новой операцией

$$\begin{aligned} A \divideontimes B = \lambda AB + \mu BA = \varrho [A, B] + \sigma \{A, B\}, \\ \{A, B\} = [A, B]_+, \end{aligned} \tag{5}$$

* Путем такой мутации можно получить только специальные J-алгебры. В данном случае можно представить, что элементы матрицы превращены в октонионы после мутации (или, что равносильно, мы имеем мутацию формальной матричной алгебры октонионных матриц).

где λ, μ — произвольные вещественные параметры, $\varrho = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)$, $\sigma = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$. При $\sigma \to 0$ получается так наз. коммутаторная алгебра, являющаяся алгеброй Ли, если исходная алгебра ассоциативна. Если исходная алгебра альтернативна [7], то коммутаторная алгебра, вообще говоря, является *бинарной алгеброй Ли* (*BL-алгеброй* или *алгеброй Мальцева*) [7].

В приведенном примере предельный переход в некотором смысле отличается от сжатий групп (алгебр), где ε-преобразованные генераторы в пределе не исчезают, а дают коммутативный радикал, не изменив размерности алгебры Ли. В рассмотренном примере мы перешли от 27-мерной (т. е. зависящей от 27 вещественных параметров) алгебры M_3^8 к 9-мерной алгебре $U(3)$. Строго говоря, это возможно лишь тогда, когда октонионные единицы не имеют инфинитезимального характера.

Можно указать неассоциативные алгебры, имеющие вполне определенный инфинитезимальный характер. Это BL-алгебры, для которых существуют неассоциативные алгебраические системы (так наз. аналитические лупы [7]), так, что между ними имеется точно такое же соответствие, как между алгебрами Ли и группами Ли. Поэтому для BL-алгебр (или аналитических луп) можно развить содержательную теорию сжатий (а также деформацию алгебр Ли в эти неассоциативные системы).

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Л. Соргсеппа за указание на возможное значение неассоциативности в физике и Х. Ыйглане за внимание и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Inönü E., Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **39**, 510 (1953).
2. Лыхмус Я., II летняя школа по проблемам теории элементарных частиц, Отепя, 1967, ч. 4, с. 1—132, Тарту, 1968.
3. Santilli R. M., Nuovo Cimento, **A 51**, 570 (1967).
4. Jordan P., Z. Phys., **80**, 285 (1933).
5. Braun H., Kocher M., Jordan-Algebren, Berlin, 1966.
6. Schafer R. D., An Introduction to Nonassociative Algebras, New York, 1967.
7. Мальцев А. И., Матем. сб., **36** (78), 569 (1955).
8. Gamba A., High Energy Phys. and Elementary Particles, Vienna, 1965, p. 641.
9. Gamba A., J. Math. Phys., **8**, 775 (1967).
10. Линник Ю., УМН, **4**, 49 (1949).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/V 1968