EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.4.14

*Я. ЛЫХМУС*

# СЖАТИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП

*J. LÕHMUS.* SIMPLEKTILISTE RÜHMADE KONTRAKTSIOONID

*J. LÕHMUS.* CONTRACTIONS OF SYMPLECTIC GROUPS

Метод предельных переходов [1] в многообразии групп (алгебр) с заданным числом параметров (с заданной размерностью) оказался весьма полезным при формулировке и решении многих проблем в теории элементарных частиц [2]. До сих пор в литературе более подробно освещались только сжатия унитарных и ортогональных групп [3]. Цель настоящей заметки — указать важнейшие сжатия симплектических групп $Sp(n,R)$, $Sp(n)$ и $Sp(p,q)$ [4].

Напишем соотношения коммутации для генераторов в векторном представлении

$$
\begin{aligned}
&I_{ij} = E_{ij} - E_{m+j,\, m+i}, \quad (E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\,\delta_{jl},\\
&J_{ij} = E_{i,\, m+j} + E_{j,\, m+i} = J_{ji},\\
&K_{ij} = E_{m+i,\, j} + E_{m+j,\, i} = K_{ji}, \qquad i, j, k, l = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned} \tag{1}
$$

для симплектической группы $Sp(n,R)$, $n = 2m$ (их всего $\frac{1}{2}n(n+1) = m(2m+1)$)

$$
\begin{aligned}
&[I_{ij}, I_{kl}] = \delta_{jk} I_{il} - \delta_{li} I_{kj},\\
&[J_{ij}, J_{kl}] = [K_{ij}, K_{kl}] = 0,\\
&[I_{ij}, J_{kl}] = \delta_{jk} J_{il} + \delta_{jl} J_{ik},\\
&[I_{ij}, K_{kl}] = -\delta_{ik} K_{kl} - \delta_{il} K_{jk},\\
&[J_{ij}, K_{kl}] = \delta_{jk} I_{il} + \delta_{ik} I_{jl} + \delta_{jl} I_{ik} + \delta_{il} I_{jk},\\
&\qquad\qquad i, j, k, l = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned} \tag{2}
$$

Из коммутационных соотношений (2) видно, что $m^2$ генераторов $I_{ij}$ образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре полной линейной группы $GL(m,R)$. Генераторы $J_{ij}$ и $K_{ij}$ образуют две абелевы подалгебры размерности $\frac{1}{2}m(m+1)$.

Сжатие относительно подалгебры $GL(m,R)$ ведет к алгебре $GL(m,R) \oplus T_{m(m+1)}$ (радикал $T$ распадается на два неприводимых представления размерности $\frac{1}{2}m(m+1)$ — на $J$ и $K$). Ввиду того что допредельное разложение является разложением Картана, допредельную алгебру можно считать тоже градуированной [2]. Всевозможные симметрические разложения симплектических алгебр приводятся в [5].

Своеобразные, «почти абелевы» группы получаются при сжатиях относительно подалгебр $\{I_{ij}\}$ или $\{K_{ij}\}$. В предельной алгебре отличными от нуля будут только коммутаторы

$$[\tilde{J}_{ij}, \tilde{K}_{kl}] = \delta_{jk}\tilde{I}_{il} + \delta_{ik}\tilde{I}_{jl} + \delta_{jl}\tilde{I}_{ik} + \delta_{il}\tilde{I}_{jk}. \qquad (3)$$

Очевидно, что по отношению к сжатию такого типа подалгебры $\{J_{ij}\}$ и $\{K_{ij}\}$ ведут себя совершенно симметрично.

Сжатие относительно подалгебры $Sp(n-2, R)$ дает алгебру $(Sp(n-2, R) \oplus T_{2n-2}) \oplus T_1$.

Сжатия можно провести еще относительно неприводимых полупростых подалгебр $Sp(s, R) \oplus SO(t) \subset Sp(n, R)$, $st = n$, $s \geqslant 2$, $t \geqslant 3$, $t \neq 4$ или $s = 2$, $t = 4$ и $Sp(2p) \oplus Sp(2(m-p)) \subset Sp(2m)$, $p = 1, 2, \ldots, m$. Последнее включение является частным случаем более общего «немаксимального» включения [6]:

$$SL(n_1) \oplus \ldots \oplus SL(n_k) \oplus Sp(2m_1) \oplus \ldots \oplus Sp(2m_l) \subset Sp(2m),$$

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i+1) + \sum_{i=1}^{l} m_i = m. \qquad (4)$$

Результаты легко переводимы также на случаи унитарной симплектической группы $Sp(n)$, $n = 2m$ и псевдосимплектических групп $Sp(p, q)$, $p+q = 2m$, $p = 2u$, $q = 2v$.

Алгебра Ли группы $Sp(p, q)$ состоит [4] из матриц вида

$$\left\| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12}^{*} & A_{22} & A_{14}^{T} & A_{24} \\ -\bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} & \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ A_{14}^{*} & -\bar{A}_{24} & -A_{12}^{T} & \bar{A}_{22} \end{array} \right\|, \qquad (5)$$

где $A_{11}, A_{22}$ — антисимметрические матрицы порядков $p, q$; $A_{13}, A_{24}$ — симметрические матрицы порядков $p, q$; $A_{12}, A_{14}$ — произвольные $(p \times q)$-матрицы ($\bar{A}, A^T, A^*$ обозначают соответственно комплексно-сопряженные, транспонированные и эрмитово-сопряженные матрицы). Алгебра Ли максимальной компактной подгруппы $Sp(p) \oplus Sp(q)$ получается из (5), если положить $A_{12}, A_{14} = 0$; это — симметрическая подалгебра разложения Картана. Отсюда легко получить соответствующее сжатие.

Сделаем наконец некоторые замечания о сжатиях относительно неполупростых подалгебр [7] алгебры симплектической группы. Все максимальные неполупростые подалгебры состоят из матриц, переводящих в себя некоторое подпространство, в котором кососимметрическая форма вырождена. Рассмотрим простейший случай группы $Sp(n, R)$, алгебра Ли которой (с соотношениями коммутаций (2)) и неполупростая подалгебра $H$ имеют вид

$$Sp(n, R) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $A, B, C$ — квадратные матрицы порядка $m$, $B, C$ — симметрические. Сжатие относительно этой неполупростой подалгебры ведет к алгебре, в которой последние коммутаторы (2) равны нулю, т. е. результат такой же, как и при сжатии относительно подалгебры $GL(m, R)$. Более интересные случаи сжатий получаются относительно неполупростых подгрупп, для которых вырожденное подпространство выбрано иначе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Inönü E., Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **39**, 510 (1953).
2. Лыхмус Я., II летняя школа по проблемам теории элементарных частиц, Отепя, 1967, ч. 4, Тарту, 1968, с. 1—132.
3. Rosen J., Nuovo Cimento, **B 46**, 1 (1966).
4. Gourdin M., Unitary symmetries and their application to high energy physics, Amsterdam, 1967.
5. Розенфельд Б. А., Карпова Л. М., Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, **13**, 168 (1966).
6. Дынкин Е. Б., Матем. сб., **30** (72), 349 (1952).
7. Кантор И. Л., Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, **13**, 310 (1966).


*Институт физики и астрономии*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
16/V 1968

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 4

*Я. ЛЫХМУС*

# О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*J. LÕHMUS.* KONTRAKTSIOONIDE ÜLDISTAMISE VÕIMALUSTEST ALGEBRALISTE SÜSTEEMIDE JAOKS

*J. LÕHMUS.* SOME POSSIBILITIES FOR GENERALIZATION OF CONTRACTION PROCEDURE FOR ALGEBRAIC SYSTEMS

Не исключено, что в физике элементарных частиц могут иметь некоторое значение не только группы, выражающие симметрию динамических систем, но и другие алгебраические системы, может быть более явно и прямо связанные с динамикой. В физике симметрий в последнее время непрестанно повышается внимание к предельным переходам [1], отражающим предельные соотношения между физическими теориями или между динамическими ситуациями [2]. Цель настоящей заметки — обратить внимание на возможность предельных переходов не только между группами Ли (алгебрами Ли), но и между другими алгебраическими системами.

Алгебраическими системами, для которых имеют смысл вложения [3] и предельные переходы в алгебры Ли, прежде всего являются *алгебры Йордана* [4, 5], более общие неассоциативные алгебры [6] и *алгебры Мальцева* [7]. *Исключительная алгебра Йордана* $M_3^8$ [8, 9] тесно связана с окто-