EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.4.02

О. ВААРМАНН

О НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА. I

В работах [1, 2] идея последовательной аппроксимации обратного оператора применена в итерационных процессах для минимизации функций нескольких переменных и решения систем трансцендентных уравнений.

Для решения нелинейных операторных уравнений С. Ульм предложил [3] итерационный процесс такого типа, являющийся некоторой модификацией метода Ньютона [4]. В предположении, что решение операторного уравнения существует, в статье [3] доказаны теоремы о сходимости этого метода и рассмотрены некоторые случаи его применения.

В данной статье, исходя из иных предположений, доказывается сходимость итерационного процесса, предложенного в работе [3]. Кроме того, рассматриваются другие итерационные методы с последовательной аппроксимацией обратного оператора, доказывается их сходимость, а также существование решения нелинейного операторного уравнения при сделанных автором предположениях. Для расширения области сходимости исследуемых итерационных методов используются итерационные параметры, определяющие длину шага итерации.

1. Пусть в вещественном банаховом пространстве E_1 дано операторное уравнение

$$P(x) = 0. \tag{1}$$

Для нахождения решения уравнения (1) часто применяются методы вида

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n A_n P(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где ε_n — вещественные числа, определяющие длину шага итерации, A_n — последовательность линейных операторов.

В статье [5] доказан ряд интересных в теоретическом отношении теорем о сходимости и скорости сходимости методов вида (2), если, в частности, A_n — последовательность линейных ограниченных симметричных и положительно определенных операторов в вещественном гильбертовом пространстве H. Однако никаких указаний и правил для практического конструирования последовательности операторов A_n в ней не приводится.

Если $A_n = [P'(x_n)]^{-1}$ и $\varepsilon_n = 1$, то метод (2) превращается в метод Ньютона — Канторовича [4], при этом нахождение точного обратного оператора (или эквивалентного ему решения линейного операторного уравнения $P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -P(x_n)$) на каждом шаге итерации может оказаться довольно трудным, в связи с чем представляют интерес методы, основывающиеся на последовательной аппроксимации обратного оператора.

Используя метод Ньютона для обращения линейного оператора, можно построить итерационный процесс (по-видимому, впервые предложенный С. Ульмом) вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n), & (3) \\ A_{n+1} = A_n[2E - P'(x_{n+1})A_n], & (4) \end{cases}$$

где E — единичный оператор и $n = 0, 1, 2, \ldots$. В данной статье для аппроксимации обратного оператора используются, кроме того, итерационные процессы

$$A_{n+1} = A_n\{3E - 3P'(x_{n+1})A_n + [P'(x_{n+1})A_n]^2\} \text{ и}$$

$$A_{n+1} = A_n - \alpha(P'(x_{n+1})A_n - E)$$

($\alpha > 0$), рассмотренные соответственно в [6] и [7].

Для одношагового метода (при решении нелинейных операторных уравнений)

$$x_{n+1} = x_n - Q_n(x_n), \tag{5}$$

где Q_n — некоторый оператор из E_1 в E_1, Б. Т. Поляком [8] доказана общая теорема о сходимости такого рода методов.

Теорема (*Б. Т. Поляк*). *Пусть $x_0 \in E_1$, $S = \{x \in E_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ и на S выполнены следующие условия:*

а) *оператор $P(x)$ дифференцируем (по Фреше);*

б) *производная $P'(x)$ удовлетворяет условию Липшица* $\|P'(x) - P'(y)\| \leqslant L\|x - y\|$;

в) $\|P(x) - P'(x)Q_n(x)\| \leqslant \gamma\|P(x)\|$, $\gamma < 1$;

г) $\|Q_n(x)\| \leqslant \lambda\|P(x)\|$;

д) $\delta = \gamma + \frac{L\lambda^2}{2}\|P(x_0)\| < 1$.

Тогда 1) *если $\gamma \neq 0$ и $r_1 = \lambda\|P(x_0)\|/(1 - \delta) \leqslant \varrho$, то уравнение $P(x) = 0$ имеет в S решение x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_1$, к которому сходится последовательность* (5), *причем*

$$\|x_n - x^*\| = 0(\gamma^n) \leqslant r_1\delta^n;$$

2) *Если $\gamma = 0$ и $r_2 = (2/L\lambda)H_0(\delta) \leqslant \varrho$,*

где

$$H_n(\delta) = \sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2^k},$$

то уравнение $P(x) = 0$ имеет в S решение x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_2$, к которому сходится последовательность (5), *причем*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant (2/L\lambda)H_n(\delta).$$

Отметим, что выполнение в этой теореме условий в) и г) для любого $x \in S$ излишне; достаточно, чтобы этим требованиям удовлетворяли точки итерационной последовательности $x_{n+1} = x_n - Q_n(x_n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, поскольку предположения в) и г) использовались лишь для выведения соотношений

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant \delta_n \|P(x_n)\| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(см. [8], с. 996).

Ниже теорема Б. Т. Поляка применяется для исследования сходимости метода (3)—(4) и других подобных методов.

Обозначим через A_0 начальное приближение к оператору $[P'(x_0)]^{-1}$ и введем обозначения λ_n, γ_n и β_n для постоянных удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$\|A_n\| \leqslant \lambda_n \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

$$\|E - P'(x_n) A_n\| \leqslant \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

$$\|E - P'(x_n) A_{n-1}\| \leqslant \beta_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Если положить

$$c_0 = L\|P(x_0)\|, \tag{9}$$

$$\gamma_0 = \max\{\beta_0^2, \|E - P'(x_0) A_0\|\}, \tag{10}$$

$$\lambda_0 = C(1 + \gamma_0), \tag{11}$$

$$\lambda_1 = C(1 + \beta_0^2), \tag{12}$$

$$\delta_n = \gamma_n + \frac{L\lambda_n^2}{2} \|P(x_n)\|, \tag{13}$$

$$r_1^{(n)} = \lambda_n \|P(x_0)\| / (1 - \delta_n), \qquad \text{где } n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

то можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in E_1$, $S = \{x \in E_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ и на S выполнены следующие условия:*

1° *оператор $P(x)$ дифференцируем (по Фреше);*

2° *производная $P'(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|P'(x) - P'(y)\| \leqslant L\|x - y\|;$$

3° *существует $[P'(x)]^{-1}$ и $\|[P'(x)]^{-1}\| \leqslant C$;*

4° $\delta_0 = \gamma_0 + \frac{L\lambda_0^2}{2} \|P(x_0)\| < 1$;

5° $\beta_1 = \beta_0^2 + \lambda_1^2 c_0 \delta_0 \leqslant \beta_0$.

Тогда, если $r_1^{(0)} = \lambda_0 \|P(x_0)\| / (1 - \delta_0) \leqslant \varrho$, то уравнение $P(x) = 0$ имеет в S решение x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_1^{(0)}$, к которому сходится последовательность (3)—(4), причем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant r_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \leqslant r_1^{(0)} \delta_0^n,$$

где $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом $x_n \to x^*$ со скоростью, большей, чем геометрическая прогрессия.

Доказательство. Из неравенств (7) и (8) заключаем, что

$$\|E-P'(x_n)A_n\| = \|E-P'(x_n)A_{n-1}[2E-P'(x_n)A_{n-1}]\| =$$
$$= \|(E-P'(x_n)A_{n-1})(E-P'(x_n)A_{n-1})\| \leqslant \beta_{n-1}^2,$$

так что можно принять

$$\gamma_n = \beta_{n-1}^2, \qquad \text{где } n=1,2,\ldots \tag{15}$$

Покажем, что можно принять

$$\lambda_n = C(1+\gamma_n), \tag{16}$$

$$\beta_n = \beta_{n-1}^2 + \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i. \tag{17}$$

По условию 3° теоремы 1 имеем

$$\|A_n\| = \|[P'(x_n)]^{-1} + A_n - [P'(x_n)]^{-1}\| =$$
$$= \|[P'(x_n)]^{-1} + [P'(x_n)]^{-1}(P'(x_n)A_n - E)\| \leqslant C(1+\gamma_n),$$

и в дальнейшем можно считать, что

$$\lambda_n = C(1+\gamma_n) = C(1+\beta_{n-1}^2), \qquad \text{где } n=1,2,\ldots \tag{18}$$

Рассмотрим разность

$$E - P'(x)A_n = E - P'(x_n)A_n + P'(x_n)A_n - P'(x)A_n,$$

полагая $x = x_{n+1}$. Получаем

$$\|E-P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant \|E-P'(x_n)A_n\| + \|P'(x_n)A_n - P'(x_{n+1})A_n\|.$$

Имея в виду линейность операторов A_n, а также то, что $P'(x)$ удовлетворяет условию Липшица, можем записать

$$\|P'(x_n)A_n - P'(x_{n+1})A_n\| =$$
$$= \|[P'(x_n) - P'(x_{n+1})]A_n\| \leqslant \lambda_n L \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Учитывая оценку

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \lambda_n \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \qquad \text{(ср. [8], с. 996)}$$

неравенства (6), (8) и соотношение (9), получаем окончательно

$$\|E-P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant \beta_n = \beta_{n-1}^2 + \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i, \qquad \text{где } n=1,2,\ldots \tag{19}$$

На основании условий 4°, 5° теоремы 1 и оценок $\|P(x_{n+1})\| \leqslant \leqslant \delta_n \|P(x_n)\|$ легко доказать по индукции, что при $n \to \infty$

$$\beta_n \searrow 0, \quad (20) \qquad \delta_n \searrow 0, \quad (23)$$
$$\gamma_n \searrow 0, \quad (21) \qquad \|P(x_n)\| \searrow 0. \quad (24)$$
$$\lambda_n \searrow C, \quad (22)$$

Теперь нетрудно проверить выполнение условий в), г) и д) предыдущей теоремы.

в) Учитывая, что $Q_n(x) = A_n P(x)$, имеем

$$\|P(x_n) - P'(x_n) A_n P(x_n)\| \leqslant \|E - P'(x_n) A_n\| \, \|P(x_n)\| \leqslant \gamma_n \|P(x_n)\|.$$

Так как $1 > \gamma_0 \geqslant \gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n \geqslant \ldots \geqslant 0$ (см. (21)), то достаточно взять $\gamma = \gamma_0 < 1$.

г) С учетом (6) и (22) получаем

$$\|Q_n(x_n)\| = \|A_n P(x_n)\| \leqslant \lambda_n \|P(x_n)\| \leqslant \lambda_0 \|P(x_n)\|,$$

т. е. достаточно принять $\lambda = \lambda_0$.

Выполнение условия д) очевидно при $\delta = \delta_0$.

Таким образом, при сделанных предположениях все требования предыдущей теоремы выполнены, и остается лишь применить эту теорему.

Кроме того (ср. [8], с. 996),

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|A_k P(x_k)\| \leqslant \lambda_k \|P(x_k)\| \leqslant \lambda_k \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i \qquad (k \geqslant 1)$$

и поэтому для $m \geqslant n$ в силу $\delta_{n+1} \leqslant \delta_n$ и $\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n$

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \lambda_n \|P(x_0)\| \sum_{k=n}^{m-1} \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i \leqslant \lambda_n \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \sum_{k=n}^{m-1} \delta_n^{k-n},$$

обозначая $\eta_0 = \delta_n$, получаем

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \lambda_n \|P(x_0)\| \frac{1 - \eta_0^{m-n}}{1 - \eta_0} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i = r_1^{(n)} (1 - \eta_0^{m-n}) \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \leqslant$$

$$\leqslant r_1^{(0)} (1 - \eta_0^{m-n}) \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$

где

$$r_1^{(n)} = \lambda_n \|P(x_0)\| / (1 - \eta_0) = \lambda_n \|P(x_0)\| / (1 - \delta_n) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{n-1} \|P(x_0)\| / (1 - \delta_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_0 \|P(x_0)\| / (1 - \delta_0) = r_1^{(0)}.$$

Если $m \to \infty$, то

$$\|x^* - x_n\| \leqslant r_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \leqslant r_1^{(0)} \delta_0^n.$$

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. В пределе $n \to \infty$ скорость сходимости итерационного процесса (3)—(4) приближается к квадратичной в силу $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$ (см. п. 2 теоремы Б. Т. Поляка).

Квадратичная сходимость метода (3)—(4) при хороших начальных приближениях x_0, A_0 доказана в [3].

2. Рассмотрим теперь итерационные процессы вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n A_n P(x_n) & (25) \\ A_{n+1} = A_n [2E - P'(x_{n+1}) A_n], & (26) \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon_n \leqslant 1$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Обозначим

$$\|A_n\| \leqslant \lambda_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{27}$$

$$\|E - \varepsilon_n P'(x_n) A_n\| \leqslant \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{28}$$

$$\|E - P'(x_n) A_{n-1}\| \leqslant \beta_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{29}$$

$$c_0 = L \|P(x_0)\|, \tag{30}$$

$$\gamma_0 = \max\{\varepsilon_1 \beta_0^2 + 1 - \varepsilon_1, \|E - \varepsilon_0 P'(x_0) A_0\|\}, \tag{31}$$

$$\lambda_0 = C(1 + \gamma_0), \tag{32}$$

$$\lambda_1 = C(1 + \beta_0^2), \tag{33}$$

$$\delta_n = \gamma_n + \tfrac{1}{2} \varepsilon_n^2 \lambda_n^2 L \| P(x_n)\|, \tag{34}$$

$$\bar{r}_1^{(n)} = \omega \| P(x_0) \| / (1 - \delta_n), \tag{35}$$

где $\omega = \sup\{\varepsilon_i \lambda_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ и $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть $x_0 \in E_1$ и на сфере $S = \{x \in E_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ в дополнение к условиям 1°—3° теоремы 1 выполнены следующие условия:*

а) $\delta_0 = \gamma_0 + \dfrac{\varepsilon_0^2 \lambda_0^2 L}{2} \|P(x_0)\| < 1;$

б) $\beta_1 = \beta_0^2 + \varepsilon_1 \lambda_1^2 c_0 \delta_0 \leqslant \beta_0;$

в) $\varepsilon_{n-1} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \min\{1, \varepsilon_{n-1} \delta_{n-1}^{-\frac{1}{2}}\}$ $\qquad (n = 1, 2, \ldots).$

Тогда, если $\bar{r}_1^{(0)} = \omega \|P(x_0)\| / (1 - \delta_0) \leqslant \varrho$, то уравнение $P(x) = 0$ имеет в S решение, к которому сходится последовательность (25)—(26), причем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \bar{r}_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$

где $\delta_k \to 0$ при $\varepsilon_k \to 1$ и $k \to \infty$.

Доказательство. Из неравенств (28)—(29) получаем

$$\|E - \varepsilon_n P'(x_n) A_n\| = \|E - 2\varepsilon_n P'(x_n) A_{n-1} + \varepsilon_n [P'(x_n) A_{n-1}]^2\| =$$

$$= \|\varepsilon_n \{E - 2P'(x_n) A_{n-1} + [P'(x_n) A_{n-1}]^2\} +$$

$$+E-\varepsilon_n E\| \leqslant \varepsilon_n \|E-P'(x_n)A_{n-1}\|^2+$$

$$+1-\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_n \beta_{n-1}^2+1-\varepsilon_n=\gamma_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

По условию 3° теоремы 1 имеем

$$\|A_n\| \leqslant \|[P'(x_n)]^{-1}+[P'(x_n)]^{-1}(P'(x_n)A_n-E)\| \leqslant$$

$$\leqslant C(1+\beta_{n-1}^2)=\lambda_n \quad (n=1,2,\ldots).$$

Здесь $Q_n(x)=\varepsilon_n A_n P(x)$, поэтому

$$\|Q_n(x_n)\|=\varepsilon_n\|A_n P(x_n)\| \leqslant \varepsilon_n \lambda_n \|P(x_n)\|,$$

и в силу предположения в) и $\|P(x_n)\| \leqslant \delta_{n-1}\|P(x_{n-1})\|$

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|Q_n(x_n)\| \leqslant \varepsilon_n \lambda_n \|P(x_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n \lambda_n \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \leqslant \omega \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$

$$\|E-P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant \|E-P'(x_n)A_n\|+\|P'(x_n)A_n-P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{n-1}+\lambda_n\|x_n-x_{n+1}\| \leqslant \beta_{n-1}^2+\varepsilon_n \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i=\beta_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Далее (см. [8], с. 996)

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant \gamma_n \|P(x_n)\|+\frac{L\|Q_n(x_n)\|^2}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_n \|P(x_n)\|+\frac{\varepsilon_n^2 \lambda_n^2 L\|P(x_n)\|^2}{2}=\delta_n \|P(x_n)\|,$$

где

$$\delta_n=\gamma_n+\frac{\varepsilon_n^2\lambda_n^2 L\|P(x_n)\|}{2} \qquad \text{и } n=0,1,2,\ldots.$$

Допустим, что

$$\beta_n \leqslant \beta_{n-1},$$
$$\gamma_n \leqslant \gamma_{n-1},$$
$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n-1},$$
$$\delta_n \leqslant \delta_{n-1},$$

тогда на основании предположения в) и $\|P(x_n)\| \leqslant \delta_{n-1}\|P(x_{n-1})\|$ имеем

$$\beta_{n+1}=\beta_n^2+\varepsilon_{n+1}\lambda_{n+1}^2 c_0 \prod_{i=0}^{n} \delta_i \leqslant \beta_{n-1}^2+\varepsilon_n \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i=\beta_n,$$

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\varepsilon_{n+1}\beta_n^2-\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n\beta_{n-1}^2+\varepsilon_n \leqslant (\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n)\beta_{n-1}^2-(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n) \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n)(\beta_{n-1}^2-1) \leqslant 0,$$

и, следовательно, $\gamma_{n+1} \leqslant \gamma_n$, и далее $\lambda_{n+1} = C(1+\beta_n^2) \leqslant C(1+\beta_{n-1}^2) = \lambda_n$,

$$\delta_{n+1} = \gamma_n + \frac{\varepsilon_{n+1}^2 \lambda_{n+1}^2 L}{2} \|P(x_{n+1})\| \leqslant \gamma_n + \frac{\varepsilon_n^2 \lambda_n^2 L}{2} \|P(x_n)\| = \delta_n.$$

Итак, при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\beta_n \leqslant \beta_0,$$
$$\gamma_n \leqslant \gamma_0,$$
$$\lambda_n \leqslant \lambda_0,$$
$$\delta_n \leqslant \delta_0,$$

и если положить $\gamma = \gamma_0$, $\lambda = \lambda_0$, $\delta = \delta_0$, то все условия теоремы Б. Т. Поляка выполнены.

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon_n \to 1$ теорема 2 превращается в теорему 1, причем при $n \to \infty$ и $\varepsilon_n \to 1$,

$$\beta_n \searrow 0, \qquad \delta_n \searrow 0,$$
$$\gamma_n \searrow 0, \qquad \|P(x_n)\| \searrow 0$$
$$\lambda_n \searrow C, \qquad \text{(ср. теор. 1)}.$$

Учитывая, что $\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \omega \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i$, нетрудно получить (см. теор. 1)

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \bar{r}_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i.$$

3. Исследуем итерационный процесс

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n), & (36) \\ A_{n+1} = A_n \{3E - 3P'(x_{n+1}) A_n + [P'(x_n) A_n]^2\}, & (37) \end{cases}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$:

Если используем (6—9), (11), (13—14) и заменим (10) и (12) соответственно на

$$\gamma_0 = \max\{\beta_0^3, \|E - P'(x_0) A_0\|\},$$

$$\lambda_1 = C(1+\gamma_1) = C(1+\beta_0^3),$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $x_0 \in E_1$, $S = \{x \in E_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$, *на* S *выполнены условия* 1°—4° *теоремы* 1 *и*

$$\beta_1 = \beta_0^3 + \lambda_1^2 c_0 \delta_0 \leqslant \beta_0.$$

Тогда, если $r_1^{(0)} = \lambda_0 \| P(x_0) \| / (1 - \delta_0) \leqslant \varrho$, *то уравнение* $P(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\| x_0 - x^* \| \leqslant r_1^{(0)}$, *к которому сходится последовательность* (36)—(37), *причем*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant r_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \leqslant r_1^{(0)} \delta_0^n,$$

где $\delta_k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. В данном случае из (7) и (8) следует, что

$$\| E - P'(x_n) A_n \| = \| E - P'(x_n) A_{n-1} \{ 3E - 3P'(x_n) A_{n-1} +$$

$$+ [P'(x_n) A_{n-1}]^2 \} \| \leqslant \| E - P'(x_n) A_{n-1} \|^3 \leqslant \beta_{n-1}^3 = \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Имея в виду (6) и (9), получаем

$$\| E - P'(x_{n+1}) A_n \| \leqslant \| E - P'(x_n) A_n \| + \| P'(x_n) A_n - P'(x_{n+1}) A_n \| \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{n-1}^3 + c_0 \lambda_n^2 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i = \beta_n, \qquad \text{где } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

В остальном доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 2. В принципе для нахождения A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ можно применять итерационные процессы высшего порядка $(p > 3)$ [6], но в последнем случае значительно возрастает объем вычислений на каждом шаге итерации.

4. Пусть, в частности, $E_1 = H$ (H — некоторое вещественное гильбертово пространство) и оператор $P'(x)$ — положительно определенный, тогда для решения уравнения $P(x) = 0$ можно применить следующий итерационный процесс:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n), && (38) \\ & A_{n+1} = A_n - \alpha (P'(x_{n+1}) A_n - E), && (39) \end{aligned} \right.$$

где α — положительное число и $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Используя (6)—(9), (13)—(14) и полагая

$$\begin{aligned} & \mu = \| E - \alpha P'(x) \| = \max \{ |1 - \alpha m|, |1 - \alpha M| \}, \\ & \gamma_0 = \max \{ \mu \beta_0, \| E - P'(x_0) A_0 \| \}, \\ & \lambda_0 = m^{-1} (1 + \gamma_0), \\ & \lambda_1 = m^{-1} (1 + \mu \beta_0), \end{aligned}$$

получаем теорему.

Теорема 4. *Пусть* $x_0 \in H$, $S = \{ x \in H : \| x - x_0 \| \leqslant \varrho \}$, *на* S *выполнены условия* 1°, 2°, 4° *теоремы* 1 *и*

а) $m(h, h) \leqslant (P'(x) h, h) \leqslant M(h, h)$, где $h \in H$, и $0 < m \leqslant M$;

б) $\beta_1 = \mu \beta_0 + \lambda_1^2 c_0 \delta_0 \leqslant \beta_0$.

Тогда, если $r_1^{(0)} = \lambda_0 \| P(x_0) \| / (1 - \delta_0) \leqslant \varrho$, *то уравнение* $P(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_1^{(0)}$, *к которому сходится последовательность* (38)—(39), *причем*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant r_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$

где $\delta_k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Согласно (7) и (8) получаем

$$\|E - P'(x_n) A_n\| = \|E - P'(x_n)[A_{n-1} - \alpha(P'(x_n) A_{n-1} - E)]\| =$$
$$= \|(E - \alpha P'(x_n))(E - P'(x_n) A_{n-1})\| \leqslant \mu \beta_{n-1} = \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

На основании условия а) теоремы 4

$$M^{-1}(h, h) \leqslant ([P'(x)]^{-1} h, h) \leqslant m^{-1}(h, h) \quad \text{и}$$
$$\|A_n\| = \|[P'(x_n)]^{-1} + [P'(x_n)]^{-1}(P'(x_n) A_n - E)\| \leqslant$$
$$\leqslant m^{-1}(1 + \gamma_n) = m^{-1}(1 + \mu \beta_{n-1}).$$

Далее положим

$$\lambda_n = m^{-1}(1 + \mu \beta_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Оценим норму:

$$\|E - P'(x_{n+1}) A_n\| \leqslant \|E - P'(x_n) A_n\| + \|P'(x_n) A_n - P'(x_{n+1}) A_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \mu \beta_{n-1} + \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i = \beta_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теперь нетрудно убедиться, что при сделанных предположениях и $n \to \infty$

$$\beta_n \searrow 0,$$
$$\gamma_n \searrow 0, \qquad \delta_n \searrow 0,$$
$$\lambda_n \searrow m^{-1}, \qquad \|P(x_n)\| \searrow 0.$$

Доказательство завершается аналогично теореме 1.

5. Рассмотрим теперь итерационные процессы вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n A_n P(x_n), & (40) \\ A_{n+1} = A_n - \alpha(P'(x_{n+1}) A_n - E), & (41) \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon_n \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Если принять

$$\gamma_0 = \max\{\varepsilon_1 \mu \beta_0 + 1 - \varepsilon_1, \|E - \varepsilon_0 P'(x_0) A_0\|\},$$
$$\lambda_0 = m^{-1}(1 + \gamma_0),$$
$$\lambda_1 = m^{-1}(1 + \mu \beta_0)$$

и использовать (27)—(30), (34)—(35), то действительна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $x_0 \in H$, $S = \{x \in H;\ \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$, *на* S *выполнены условия* 1° *и* 2° *теоремы* 1 *и*

а) $m(h, h) \leqslant (P'(x)h, h) \leqslant M(h, h)$, где $h \in H$, $0 < m \leqslant M$;

б) $\delta_0 = \gamma_0 + \dfrac{\varepsilon_0^2 \lambda_0^2 L}{2} \|P(x_0)\| < 1$;

в) $\beta_1 = \mu \beta_0 + \varepsilon_1 \lambda_1^2 c_0 \delta_0 \leqslant \beta_0$;

г) $\varepsilon_{n-1} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \min\{1, \varepsilon_{n-1} \delta_{n-1}^{-\frac{1}{2}}\}$ $\qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

Тогда, если $\bar{r}_1^{(0)} = \omega \|P(x_0)\| / (1 - \delta_0) \leqslant \varrho$, *то уравнение* $P(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant \bar{r}_1^{(0)}$, *к которому сходится последовательность* (40)—(41), *причем*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \bar{r}_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$

где $\delta_k \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и* $\varepsilon_k \to 1$.

Доказательство. В силу (28)—(29) имеем

$$\|E - \varepsilon_n P'(x_n) A_n\| = \|E - \varepsilon_n P'(x_n)[A_{n-1} - \alpha(P'(x_n)A_{n-1} - E)]\| =$$
$$= \|E - \varepsilon_n E + \varepsilon_n (E - \alpha P'(x_n))(E - P'(x_n)A_{n-1})\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_n \mu \beta_{n-1} + 1 - \varepsilon_n = \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и по условию а) теоремы 5

$$\|A_n\| \leqslant \|[P'(x_n)]^{-1} + [P'(x_n)]^{-1}(P'(x_n)A_n - E)\| \leqslant m^{-1}(1 + \gamma_n) =$$
$$= m^{-1}(1 + \mu \beta_{n-1}) = \lambda_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как (см. теор. 2)

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \varepsilon_n \lambda_n \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \leqslant \omega \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$

то

$$\|E - P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant \|E - P'(x_n)A_n\| + \|P'(x_n)A_n - P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \mu \beta_{n-1} + \varepsilon_n \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Завершение доказательства теоремы 5 аналогично окончанию теоремы 2.

Отметим, что и здесь при $\varepsilon_n \to 1$ из теоремы 5 получаем теорему 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fletcher R., Powell M. J. D., Computer J. № 2, 163 (1963).
2. Broyden C. G., Math. of Comp., **19**, No. 92, 577 (1965).
3. Ульм С. Ю., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 4, 403 (1967).
4. Канторович Л. В., Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **28**, 104 (1949).
5. Яковлев М. Н., Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **84**, 8 (1965).
6. Petryshyn W. V., Proc. Am. Math. Soc., **16**, No. 5, 893 (1965).
7. Kielbasinski A., Studia Math., **24**, No. 1, 13 (1964).
8. Поляк Б. Т., Ж. вычисл. мат. и матем. физ., **4**, № 6, 995 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19/III 1968

O. VAARMANN

MÕNEDEST ITERATSIOONIMEETODEIST PÖÖRDOPERAATORI JÄRKJÄRGULISE APROKSIMEERIMISEGA

Artiklis käsitletakse meetodite (3) ja (4), (25) ja (26) ning (38) ja (39) koonduvust võrrandi (1) lahendiks ja tehtud eeldustel tõestatakse selle võrrandi lahendi olemasolu. Uuritavate iteratsioonimeetodite koonduvuspiirkonna laiendamiseks kasutatakse reaalarvulisi parameetreid, mis reguleerivad iteratsioonisammu pikkust.

O. VAARMANN

ON SOME ITERATIVE METHODS WITH SUCCESSIVE APPROXIMATION OF THE INVERSE OPERATOR

In this paper some convergence theorems concerning the iterative methods (3)—(4), (25)—(26), (38)—(39) and the existence of a solution of the equation (1) are proved.