EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.4.01

Ю. РЕБАНЕ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР В ПОЛУГРУППАХ С ДВУСТОРОННИМ СОКРАЩЕНИЕМ И В КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУППАХ С СОКРАЩЕНИЕМ

1. Существует ряд работ (см., напр., [1-7]), в которых n-арная алгебраическая операция выражается через бинарные (и унарные), бинарная неассоциативная операция — через ассоциативные. Рассмотрим некоторую полугруппу P. *Полилинейной операцией* на P назовем любую (не обязательно главную) производную операцию ω вида

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = a_0 x_1 a_1 x_2 \ldots a_{n-1} x_n a_n,$$

где a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ или элементы из полугруппы P, или же часть из них (или даже все) могут быть пустыми символами. Задавая на P некоторую систему Ω полилинейных операций, превращаем P в универсальную алгебру (P, Ω). Рассматривая всевозможные подалгебры универсальных алгебр, полученных указанным способом из класса всех полугрупп, получим некоторый класс $\mathfrak{B}$ универсальных алгебр. Оказывается, что этот класс $\mathfrak{B}$ совпадает с классом всех универсальных алгебр [4] и [8; стр. 185].

В связи с приведенным выше результатом возникает вопрос (впервые поставленный А. Курошем): при каких условиях универсальную алгебру можно представить при помощи полилинейных операций в полугруппе, принадлежащей к заданному классу полугрупп, обладающему теми или иными хорошими свойствами? При этом мы говорим, *что универсальную алгебру* (G, Ω) *можно представить при помощи полилинейных операций в полугруппе* P, *если в* P *существует такая система* Ω *полилинейных операций, что найдется хотя бы один мономорфизм алгебры* G *в алгебру* (P, Ω). В данной работе этот вопрос решается для коммутативных полугрупп с сокращением и для полугрупп с двусторонним сокращением.

2. Пусть задана универсальная алгебра (G, Ω). Для системы операций Ω предположим, что она не содержит нульарных операций и не состоит только из унарных операций. Кроме того, предположим, что в Ω найдется тождественная унарная операция ε, $\varepsilon(x) = x$. Пусть в алгебре G для любой n-арной операции $\omega_1 \in \Omega$ и любой m-арной операции $\omega_2 \in \Omega$ выполнено тождество

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, \omega_2(x_i, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \ldots, x_{m+n-1}) =$$
$$= \omega_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}, \omega_1(x_{j_k}, \ldots, x_{j_{k+n-1}}), x_{j_{k+n}}, \ldots, x_{j_{m+n-1}}), \quad (1)$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$, а $(j_1, j_2, \ldots, j_{m+n-1})$ есть любая подстановка символов $(1, 2, \ldots, n+m-1)$. Известно [4, 7], что выполнение всех тождеств вида (1) является необходимым и достаточным условием для представимости универсальной алгебры (G, Ω) при помощи полилинейных операций в коммутативной полугруппе. Следуя Г. Чупона [7], универсальную алгебру, в которой выполняются все тождества вида (1), назовем *коммутативной*. Арность (главной) производной операции χ алгебры G обозначим через $a(\chi)$. Любую основную операцию $\omega \in \Omega$ назовем *правильной операцией*. Если операции φ и ψ — правильные, $a(\varphi) = m$, $a(\psi) = n$, то и любую главную производную операцию вида $\varphi(x_1, \ldots, x_{l-1}, \psi(x_l, \ldots, x_{l+n-1}), \ldots, x_{m+n-1})$, $(l \geqslant 1)$ *назовем тоже правильной операцией*. Для любых двух главных производных операций φ и ψ, $a(\varphi) = m$ и $a(\psi) = n$ через $\varphi\psi$ обозначим следующую $m+n-1$-арную главную производную операцию: $\varphi\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}) = \varphi[\psi(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{m+n-1}]$. Факт, что кортеж $\bar{x} \in G^s$, $s \geqslant 0$, обозначим через $v(\bar{x}) = s$. Пусть в алгебре (G, Ω) для $\varphi, \psi, \Theta, \tau \in \Phi$, где Φ — множество всех правильных главных производных операций, выполняются все условные тождества вида

$$\varphi\psi(\bar{g}, \bar{x}) = \varphi\Theta(\bar{g}, \bar{y}) \rightarrow \tau\psi(\bar{z}, \bar{x}) = \tau\Theta(\bar{z}, \bar{y}), \tag{2}$$

где

$$v(\bar{g}) \geqslant 0,\ v(\bar{x}) + v(\bar{g}) = a(\varphi) + a(\psi) - 1,$$

$$v(\bar{y}) + v(\bar{g}) = a(\varphi) + a(\Theta) - 1,\ v(\bar{z}) + v(\bar{x}) =$$

$$= a(\tau) + a(\psi) - 1,\ v(\bar{z}) + v(\bar{y}) = a(\tau) + a(\Theta) - 1.$$

Теорема 1. *Для того чтобы универсальная алгебра (G, Ω) была представлена при помощи полилинейных операций в коммутативной полугруппе с сокращением, необходимо и достаточно, чтобы она была коммутативной и в ней выполнялись все условные тождества вида* (2).

3. Пусть задана универсальная алгебра (G, Ω), где система Ω не содержит нульарных операций и не состоит только из унарных операций. Условия для представимости универсальной алгебры при помощи полилинейных операций в полугруппе с двусторонним сокращением задаются в виде совокупности условных тождеств, для описания которых потребуются следующие определения и понятия. Множество всех правильных операций обозначим через Φ. Через δ обозначим (присоединенную к Φ внешним образом) тождественную унарную операцию, $\delta(x) = x$. Пусть у нас имеется некоторая n-арная правильная операция $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k-1}, \ldots, x_n)$, где $k, i \geqslant 1$, $i + k - 1 \leqslant n$. Тогда для упорядоченного множества переменных $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}$ найдутся такие $\tau \in \Phi \cup \delta$, $\psi \in \Phi$ и целое число $l \geqslant 1$, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \tau(x_1, \ldots, x_l, \psi(x_{l+1}, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k-1}, \ldots), \ldots, x_n). \tag{3}$$

Операция ψ в записи (3), конечно, не всегда определена однозначно, в частности ψ может совпадать с операцией φ; в этом случае, очевидно, надо считать $\tau = \delta$. Если для правильной операции φ имеет место (3), то тройку (ψ, j, k), где $j = i - l$, назовем *(i, k)-охватывающим отрезком для операции* φ. Все тройки вида (φ, i, k), где $\varphi \in \Phi$, $i + k - 1 \leqslant a(\varphi)$, $i, k \geqslant 1$, назовем *отрезками (операций)*. Если же операция ψ имеет в записи (3) наименьшую возможную местность по ψ, то отрезок (ψ, j, k) назовем *минимальным (i, k)-охватывающим для* φ. Минимальный

(i, k)-охватывающий для φ обозначим через $[\varphi, i, k]$. Для любой $\varphi \in \Phi$ через $\varphi^i (1 \leqslant i < a(\varphi))$ обозначим отрезок $[\varphi, i, 2]$ $(a(\varphi) \geqslant 2)$. Множество всех φ^i для всех $\varphi \in \Phi (a(\varphi) \geqslant 2)$ обозначим через $[\Phi]$. Любой кортеж $\bar{\alpha} \in [\Phi]^n (n = 1, 2, \ldots)$ назовем *Ф-кортежом.* Для любого $\psi \in \Phi (a(\psi) \geqslant 2)$ отрезок (ψ, j, k) *отождествляем с* Ф-кортежом $\bar{\beta} = (\psi^j, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^{j+(k-2)})$ и пишем $\bar{\beta} = (\psi, j, k)$. Любой кортеж вида $\bar{x} = (g_1, \varphi_1^{i_1}, g_2, \ldots, \varphi_n^{i_n}, g_{n+1})$, $n \geqslant 1$, где $\varphi_\nu^{i_\nu} \in [\Phi]$, $g_\nu, g_{\nu+1} \in G$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, назовем *GФ-кортежом.* Очевидно, любой *GФ-кортеж однозначно определяется парой кортежей* $(\bar{g} | \bar{\alpha})$, *где* $\bar{g} \in G^{n+1}$, $\bar{\alpha} \in [\Phi]^n$, $n \geqslant 1$ *и обратно.* Поэтому для GФ-кортежа $\bar{x} = (g_1, \varphi_1^{i_1}, \ldots, \varphi_n^{i_n}, g_{n+1})$ пишем $\bar{x} = (\bar{g} | \bar{\alpha})$, где $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_{n+1})$, $\bar{\alpha} = (\varphi_1^{i_1}, \ldots, \varphi_n^{i_n})$. Для любых кортежей $\bar{x}, \bar{y}$ из множества $(G \cup [\Phi])^\infty$ определим обычную операцию приписывания $(\bar{x}, \bar{y})$. На множестве всех GФ-кортежей определим следующее отношение эквивалентности ϱ.

1°. Пусть в алгебре G для некоторой $\varphi \in \Phi$, $(a(\varphi) = m > 1)$ и некоторых кортежей $\bar{g}_1 \in G^{i-1}$, $\bar{g}, \bar{h} \in G^k$, $k > 1$, $\bar{g}_2 \in G^{m-k-i+1}$ выполнено равенство $\varphi(\bar{g}_1, \bar{g}, \bar{g}_2) = \varphi(\bar{g}_1, \bar{h}, \bar{g}_2)$. Пусть $(\varphi, i, k) = \bar{\alpha}$. Тогда GФ-кортежи $\bar{x} = (\bar{g} | \bar{\alpha})$ и $\bar{y} = (\bar{h} | \bar{\alpha})$ считаем находящимися в отношении ϱ, $\bar{x} \varrho \bar{y}$.

2°. Пусть $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$ — GФ-кортежи. Тогда из $\bar{x} = (\bar{a}, \bar{z}_1, \bar{b}) \varrho (\bar{a}, \bar{z}_2, \bar{b}) = \bar{y}$ вытекает $\bar{z}_1 \varrho \bar{z}_2$.

3°. Для $\varphi^i \in [\Phi]$ пишем $\varphi^i = \tau \circ \psi^j \circ \pi$, если $\psi^j \in [\Phi]$, $\tau, \pi \in \Phi \cup \delta$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}) = \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, \tau(x_j, \ldots, x_{j+m-1}), \pi(x_{j+m}, \ldots, x_{j+m+n-1}, x_{j+m+n}, \ldots, x_{a(\varphi)})$, где $j + m = i$, $m = a(\tau)$, $n = a(\pi)$.

Ф-кортеж

$$\bar{\gamma} = (\varphi_1^{i_1}, \varphi_2^{i_2}, \ldots, \varphi_r^{i_r}, \varphi_{r+1}^{i_{r+1}}, \ldots, \varphi_s^{i_s}, \ldots, \varphi_n^{i_n}) \tag{4}$$

назовем связанным от r до s операцией $\varphi \in \Phi$, если 1) $n + 1 \geqslant s \geqslant r \geqslant 0$, где символы $\varphi_0^{i_0}$ и $\varphi_{n+1}^{i_{n+1}}$ считаем пустыми; 2) по крайней мере один из символов $\varphi_r^{i_r}$ и $\varphi_s^{i_s}$ — непустой; 3) $a(\psi) = s - r$ и при $a(\psi) \geqslant 2$ $(\psi, 1, a(\psi)) = (\varphi_{r+1}^{i_{r+1}}, \varphi_{r+2}^{i_{r+2}}, \ldots, \varphi_s^{i_s})$; 4) для непустого $\varphi_r^{i_r}$ существует $\tilde{\varphi}_r^{j_r} \in [\Phi]$, для непустого $\varphi_s^{i_s}$ существует $\tilde{\varphi}_s^{j_s} \in [\Phi]$, такие, что $\varphi_r^{i_r} = \delta \circ \tilde{\varphi}_r^{j_r} \circ \psi$ и $\varphi_s^{i_s} = \psi \circ \tilde{\varphi}_s^{j_s} \circ \delta$. Ф-кортеж

$$\bar{\gamma}' = (\varphi_1^{i_1}, \ldots, \varphi_{r-1}^{i_{r-1}}, \tilde{\varphi}_r^{j_r}, \tilde{\varphi}_s^{j_s}, \varphi_{s+1}^{i_{s+1}}, \ldots, \varphi_n^{i_n}) \tag{5}$$

назовем *полученным стягиванием от r до s операцией* ψ *Ф-кортежа* $\bar{\gamma}$ (4). Рассмотрим GФ-кортежи $\bar{x} = ((\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3) | \bar{\gamma})$, $\bar{y} = ((\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3) | \bar{\gamma})$, где $\bar{g}_1, \bar{h}_1 \in G^r$, $\bar{g}_2, \bar{h}_2 \in G^{s-r}$, а $\bar{\gamma}$ — связанный от r до s операцией ψ Ф-кортеж вида (4). Тогда из $\bar{x} \varrho \bar{y}$ вытекает $((\bar{h}_1, \psi(\bar{h}_2), \bar{h}_3) | \bar{\gamma}') \varrho ((\bar{g}_1, \psi(\bar{g}_2), \bar{g}_3) | \bar{\gamma}')$, где $\bar{\gamma}'$ — Ф-кортеж вида (5), полученный стягиванием от r до s операцией ψ Ф-кортежа $\bar{\gamma}$.

4°. Пусть GФ-кортежи $\bar{x} = (g_1, \varphi_1^{i_1}, g_2, \ldots, \varphi_{k-1}^{i_{k-1}}, g_k, \varphi_k^{i_k}, \ldots, g_{n+1})$ и $\bar{y} = (h_1, \varphi_1^{i_1}, h_2, \ldots, \varphi_{k-1}^{i_{k-1}}, h_k, \varphi_k^{i_k}, \ldots, h_{k+1})$ находятся в отношении ϱ. Пусть существует $\psi \in \Phi$, $a(\psi) = m$ и найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in G$, что $g_k = \psi(a_1, \ldots, a_m)$ и $h_k = \psi(b_1, \ldots, b_m)$.

Тогда в отношении ϱ находятся и $G\Phi$-кортежи $x_1 = (g_1, \varphi_1^{i_1}, g_2, \ldots, g_{k-1}, \delta \circ \varphi_{k-1}^{i_{k-1}} \circ \psi, a_1, \psi^1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \psi^{m-1}, a_m, \psi \circ \varphi_k^{i_k} \circ \delta, g_{k+1}, \varphi_{k+1}^{i_{k+1}}, \ldots, g_{n+1})$ и $\bar{y}_1 = (h_1, \varphi_1^{i_1}, h_2, \ldots, h_{k-1}, \delta \circ \varphi_{k-1}^{i_{k-1}} \circ \psi, b_1, \psi^1, b_2, \ldots, \psi^{m-1}, b_m, \psi \circ \varphi_k^{i_k} \circ \delta, h_{k+1}, \varphi_{k+1}^{i_{k+1}}, \ldots, h_{n+1})$ (в случаях $k = 1$ и $k = n + 1$ символы $\delta \circ \varphi_{k-1}^{i_{k-1}} \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi_k^{i_k} \circ \delta$ соответственно считаем пустыми).

5°. Если $\bar{x} = (\bar{a}, \bar{z}_1, \bar{b})$, $\bar{y} = (\bar{a}, \bar{z}_2, \bar{b})$ — $G\Phi$-кортежи, то из $\bar{z}_1 \varrho \bar{z}_2$ вытекает $\bar{x} \varrho \bar{y}$.

6°. Эквивалентное замыкание отношения ϱ совпадает с самим ϱ.

Отношение ϱ назовем ϱ-эквивалентностью или просто эквивалентностью.

Универсальную алгебру (G, Ω) назовем *алгеброй с двусторонним сокращением*, если в ней выполнены следующие два условия: а) из эквивалентности $G\Phi$-кортежей $(\bar{g} \mid \bar{\alpha})$ и $(\bar{h} \mid \bar{\alpha})$, из существования такого отрезка операции (φ, i, k), что $\bar{\alpha} = (\varphi, i, k)$, вытекает выполнимость в G равенства $\varphi(\bar{x}_1, \bar{g}, \bar{x}_2) = \varphi(\bar{x}_1, \bar{h}, \bar{x}_2)$ при любых $\bar{x}_1 \in G^{i-1}$ и $\bar{x}_2 \in G^{a(\varphi)-k-i+1}$; б) из эквивалентности любых $G\Phi$-кортежей вида $((\bar{g}_1, x, \bar{g}_2) \mid \bar{\beta})$ и $((\bar{g}_1, y, \bar{g}_2) \mid \bar{\beta})$, $x, y \in G$ вытекает выполнимость в G равенства $x = y$.

Теорема 2. *Для того чтобы универсальная алгебра (G, Ω) была представима при помощи полилинейных операций в полугруппе с двусторонним сокращением, необходимо и достаточно, чтобы она была алгеброй с двусторонним сокращением.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Thurston H. A., Proc. Int. Congr. Math., Amsterdam, 1954, II, 68—69.
2. Thurston H. A., J. Lond. Math. Soc., 27, No. 6, 271 (1952).
3. Мальцев А. И., Успехи матем. наук, 7, 181 (1952).
4. Ребане Ю. К., Сиб. матем. ж., 7, № 4, 878 (1966).
5. Trpenovski B. L., Bull. Soc. Math. Phys. Macedonie, 15, 23 (1964).
6. Чупона Г., Bull. Soc. Math. Phys. Macedonie, 12, 5 (1961).
7. Чупона Г., Мат. Гласник, 3, № 2, 105 (1966).
8. Cohn P. M., Universal algebra, Harper and Row, 1965.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 20/III 1968

J. REBANE

UNIVERSAALSETE ALGEBRATE ESITAMISEST KAHEPOOLSE TAANDAMISEGA JA TAANDAMISEGA KOMMUTATIIVSETES POOLRÜHMADES

Artiklis antakse tarvilikud ning piisavad tingimused universaalsete algebrate esitamiseks kahepoolse taandamisega poolrühmades ja kommutatiivsetes taandamisega poolrühmades.

J. REBANE

ON THE REPRESENTATION OF UNIVERSAL ALGEBRAS IN SEMIGROUPS WITH CANCELLATIONS AND IN COMMUTATIVE SEMIGROUPS WITH CANCELLATION

In this paper necessary and sufficient conditions are given for the representation of a universal algebra in the commutative semigroup with cancellation and in the semigroup with cancellations.