EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.4.08

Л. АЙНОЛА

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК В УСИЛИЯХ И МОМЕНТАХ

Уравнения движения в напряжениях для линейной теории упругости представлены в работе [1]. В настоящей работе приводятся аналогичные уравнения для простого варианта теории типа Тимошенко упругих оболочек.

1. Основные уравнения теории. Пусть $\bar{R}$ — радиус-вектор точки срединной поверхности оболочки, $\bar{n}$ — единичный вектор нормали к срединной поверхности, x^α $(\alpha = 1,2)$ — гауссовые координаты, $\bar{r}_\alpha$ — основные векторы, $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — тензоры первой и второй квадратичной формы срединной поверхности, $c_{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор, z — расстояние от срединной поверхности. Пусть радиус-вектор $\bar{R}$ и вектор перемещений произвольной точки оболочки $\bar{U}$ представлены в виде

$$\bar{R} = \bar{r}(x^1, x^2) + z\bar{n}(x^1, x^2)$$
$$\bar{U} = (v^\alpha + z\varphi^\alpha)\bar{r}_\alpha + w\bar{n}, \tag{1.1}$$

где $v_\alpha(x^\gamma, t)$, $w(x^\gamma, t)$ — компоненты вектора перемещения срединной поверхности оболочки, $\varphi_\alpha(x^\gamma, t)$ — углы поворота нормали.

Уравнения и соотношения одного варианта теории типа Тимошенко упругих оболочек могут быть представлены в следующем виде [2]:

уравнения движения

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta N^\alpha - \varrho h v^{\beta\cdot\cdot} + p^\beta = 0$$
$$\nabla_\alpha N^\alpha + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \varrho h w^{\cdot\cdot} + p = 0 \tag{1.2}$$
$$\nabla_\alpha M^{\alpha\beta} - N^\beta - \frac{1}{12}\varrho h^3 \varphi^{\beta\cdot\cdot} + m^\beta = 0;$$

соотношения упругости

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} P_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\gamma\delta}, \qquad \omega_\alpha = \frac{2k(1+\nu)}{Eh} N_\alpha$$
$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{12}{Eh^3} P_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\gamma\delta}, \qquad P_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} - \nu c_{\alpha\gamma} c_{\beta\delta}; \tag{1.3}$$

кинематические соотношения

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\nabla_\alpha v_\beta+\nabla_\beta v_\alpha-2b_{\alpha\beta}w)$$

$$\omega_\alpha=\varphi_\alpha+\nabla_\alpha w+b_{\alpha\beta}v^\beta,\qquad \varkappa_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\nabla_\alpha\varphi_\beta+\nabla_\beta\varphi_\alpha). \tag{1.4}$$

Здесь $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, N^α — компоненты тензоров тангенциальных сил, моментов и вектора поперечных сил; p_α, p, m_α — компоненты заданных векторов внешних сил и моментов; ϱ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$, ω_α — компоненты тензоров деформации и кинетического вектора; k — коэффициент сдвига.

2. Уравнения в усилиях и моментах. Если продифференцировать соотношения (1.3), (1.4) дважды по времени, найти ускорения $v_\alpha^{\cdot\cdot}$, $w^{\cdot\cdot}$, $\varphi_\alpha^{\cdot\cdot}$ из уравнений движения (1.2) и подставить в продифференцированные уравнения (1.4) и затем найденные $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}$, $\omega_\alpha^{\cdot\cdot}$, $\varkappa_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}$ ввести в продифференцированные соотношения (1.3), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c_0^2}P_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\gamma\delta\cdot\cdot}-\frac{1}{2}(\nabla_\alpha\nabla_\gamma T^\gamma_{\cdot\beta}+\nabla_\beta\nabla_\gamma T^\gamma_{\cdot\alpha})+\\
&+b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}T^{\gamma\delta}+\frac{1}{2}(\nabla_\alpha b_{\gamma\beta}N^\gamma+\nabla_\beta b_{\gamma\alpha}N^\gamma)+\\
&+b_{\alpha\beta}\nabla_\gamma N^\gamma=\frac{1}{2}(\nabla_\alpha p_\beta+\nabla_\beta p_\alpha-2b_{\alpha\beta}p)\\
&\frac{1}{c_2^2}N_\alpha^{\cdot\cdot}-\nabla_\alpha\nabla_\beta N^\beta+b_{\alpha\beta}b^\beta_\gamma N^\gamma+\frac{12}{h^2}N_\alpha-\\
&-\nabla_\alpha(b_{\gamma\delta}T^{\gamma\delta})-b_{\alpha\beta}\nabla_\gamma T^{\gamma\beta}-\frac{12}{h^2}\nabla_\beta M^\beta_{\cdot\alpha}=\\
&=\nabla_\alpha p+b_{\alpha\beta}p^\beta+\frac{12}{h^2}m_\alpha\\
&\frac{1}{c_0^2}P_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\gamma\delta\cdot\cdot}-\frac{1}{2}(\nabla_\alpha\nabla_\gamma M^\gamma_{\cdot\beta}-\nabla_\beta\nabla_\gamma M^\gamma_{\cdot\alpha})+\\
&+\frac{1}{2}(\nabla_\alpha N_\beta+\nabla_\beta N_\alpha)=\frac{1}{2}(\nabla_\alpha m_\beta+\nabla_\beta m_\alpha).
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь

$$c_0^2=\frac{E}{\varrho},\qquad c_2^2=\frac{\mu}{k\varrho}. \tag{2.2}$$

Следовательно, уравнения (2.1) являются необходимыми условиями для системы (1.2)—(1.4).

Предположим, что начальные условия являются однородными

$$v_\alpha(x^\gamma,0)=w(x^\gamma,0)=\varphi_\alpha(x^\gamma,0)=T^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=N^\alpha(x^\gamma,0)=M^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=0$$

$$\dot v_\alpha(x^\gamma,0)=\dot w(x^\gamma,0)=\dot\varphi_\alpha(x^\gamma,0)=\dot T^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=\dot N^\alpha(x^\gamma,0)=\dot M^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=0. \tag{2.3}$$

Пусть усилия и моменты $T^{\alpha\beta}$, N^{α}, $M^{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (2.1) и деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, ω_{α}, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — условиям (1.3). Если теперь перемещения и углы поворота определить через

$$v_{\alpha}(x^{\gamma}, t)=\frac{1}{\varrho h}\int_{0}^{t}(t-\tau)[\nabla_{\beta}T^{\beta}_{\cdot\alpha}(x^{\gamma},\tau)-b_{\alpha\beta}N^{\beta}(x^{\gamma},\tau)+p_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)]\,d\tau$$

$$w(x^{\gamma}, t)=\frac{1}{\varrho h}\int_{0}^{t}(t-\tau)[\nabla_{\alpha}N^{\alpha}(x^{\gamma},\tau)+b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}(x^{\gamma},\tau)+p(x^{\gamma},\tau)]\,d\tau \qquad (2.4)$$

$$\varphi_{\alpha}(x^{\gamma}, t)=\frac{12}{\varrho h^{3}}\int_{0}^{t}(t-\tau)[\nabla_{\beta}M^{\beta}_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)-N_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)+m_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)]\,d\tau,$$

то v_{α}, w, φ_{α} удовлетворяют уравнениям движения (1.2) и v_{α}, w, φ_{α}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, ω_{α}, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — кинематическим соотношениям (1.4). Действительно, из определения (2.4) и начальных условий (2.3) непосредственно следует первое утверждение. Дифференцируя два раза по времени соотношения (2.4) и сочетая их с уравнениями (2.1), имеем

$$\frac{1}{Eh}P_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\gamma\delta}{}^{\cdot\cdot}=\frac{1}{2}(\nabla_{\alpha}v^{\cdot\cdot}_{\beta}+\nabla_{\beta}v^{\cdot\cdot}_{\alpha}-2b_{\alpha\beta}w^{\cdot\cdot})$$

$$\frac{k}{\mu h}N^{\cdot\cdot}_{\alpha}=\varphi^{\cdot\cdot}_{\alpha}+\nabla_{\alpha}w^{\cdot\cdot}+b_{\alpha\beta}v^{\beta}{}^{\cdot\cdot} \qquad (2.5)$$

$$\frac{12}{Eh^{3}}P_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\gamma\delta}{}^{\cdot\cdot}=\frac{1}{2}(\nabla_{\alpha}\varphi^{\cdot\cdot}_{\beta}+\nabla_{\beta}\varphi^{\cdot\cdot}_{\alpha}).$$

Из этих соотношений при помощи соотношений (1.3) и начальных условий (2.3) следуют соотношения (1.4).

Итак, уравнения (2.1) являются необходимыми и достаточными условиями для удовлетворения уравнений и соотношений теории типа Тимошенко упругих оболочек (1.2)—(1.4).

Уравнения (2.1) позволяют непосредственно определить усилия $T^{\alpha\gamma}$, N^{α} и моменты $M^{\alpha\beta}$. Перемещения срединной поверхности v_{α}, w и углы поворота φ_{α} определяются через найденные усилия и моменты при помощи соотношений (2.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ignaczak J., Arch. Mech. Stos., **15**, No. 2, 225—234 (1963).
2. Айнола Л., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 3, 337—344 (1965).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/IV 1967

L. AINOLA

TIMOSHENKO TÜÜPI ELASTSETE KOORIKUTE TEOORIA VÕRRANDID JÕUDUDES JA MOMENTIDES

L. AINOLA

THE EQUATIONS OF THE TIMOSHENKO TYPE THEORY OF ELASTIC SHELLS IN STRESS AND COUPLE RESULTANTS