EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 4

Л. АЙНОЛА

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК В УСИЛИЯХ И МОМЕНТАХ

Уравнения движения в напряжениях для линейной теории упругости представлены в работе [1]. В настоящей работе приводятся аналогичные уравнения для простого варианта теории типа Тимошенко упругих оболочек.

1. Основные уравнения теории. Пусть $\overline{R}$ — радиус-вектор точки срединной поверхности оболочки, $\overline{n}$ — единичный вектор нормали к срединной поверхности, x^α $(\alpha=1,2)$ — гауссовые координаты, $\overline{r}_\alpha$ — основные векторы, $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — тензоры первой и второй квадратичной формы срединной поверхности, $c_{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор, z — расстояние от срединной поверхности. Пусть радиус-вектор $\overline{R}$ и вектор перемещений произвольной точки оболочки $\overline{U}$ представлены в виде

$$\overline{R}=\overline{r}(x^1,x^2)+z\overline{n}(x^1,x^2)$$

$$\overline{U}=(v^\alpha+z\varphi^\alpha)\overline{r}_\alpha+w\overline{n}, \tag{1.1}$$

где $v_\alpha(x^\gamma,t)$, $w(x^\gamma,t)$ — компоненты вектора перемещения срединной поверхности оболочки, $\varphi_\alpha(x^\gamma,t)$ — углы поворота нормали.

Уравнения и соотношения одного варианта теории типа Тимошенко упругих оболочек могут быть представлены в следующем виде [2]:

уравнения движения

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}-b^\beta_\alpha N^\alpha-\varrho h v^{\beta\cdot\cdot}+p^\beta=0\\ \nabla_\alpha N^\alpha+b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}-\varrho h w^{\cdot\cdot}+p=0\\ \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}-N^\beta-\frac{1}{12}\varrho h^3\varphi^{\beta\cdot\cdot}+m^\beta=0;\end{gathered} \tag{1.2}$$

соотношения упругости

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{Eh}P_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\gamma\delta},\qquad \omega_\alpha=\frac{2k(1+\nu)}{Eh}N_\alpha\\ \varkappa_{\alpha\beta}=\frac{12}{Eh^3}P_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\gamma\delta},\qquad P_{\alpha\beta\gamma\delta}=a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}-\nu c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta};\end{gathered} \tag{1.3}$$

кинематические соотношения

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha v_\beta+\nabla_\beta v_\alpha-2b_{\alpha\beta}w\right) \\
\omega_\alpha=\varphi_\alpha+\nabla_\alpha w+b_{\alpha\beta}v^\beta, \qquad \varkappa_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha\varphi_\beta+\nabla_\beta\varphi_\alpha\right).
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Здесь $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, N^α — компоненты тензоров тангенциальных сил, моментов и вектора поперечных сил; p_α, p, m_α — компоненты заданных векторов внешних сил и моментов; ϱ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$, ω_α — компоненты тензоров деформации и кинетического вектора; k — коэффициент сдвига.

2. Уравнения в усилиях и моментах. Если продифференцировать соотношения (1.3), (1.4) дважды по времени, найти ускорения $\ddot{v}_\alpha$, $\ddot{w}$, $\ddot{\varphi}_\alpha$ из уравнений движения (1.2) и подставить в продифференцированные уравнения (1.4) и затем найденные $\ddot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, $\ddot{\omega}_\alpha$, $\ddot{\varkappa}_{\alpha\beta}$ ввести в продифференцированные соотношения (1.3), имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{c_0^2}P_{\alpha\beta\gamma\delta}\ddot{T}^{\gamma\delta}-\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha\nabla_\gamma T^{\gamma}_{\cdot\beta}+\nabla_\beta\nabla_\gamma T^{\gamma}_{\cdot\alpha}\right)+ \\
+b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}T^{\gamma\delta}+\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha b_{\gamma\beta}N^\gamma+\nabla_\beta b_{\gamma\alpha}N^\gamma\right)+ \\
+b_{\alpha\beta}\nabla_\gamma N^\gamma=\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha p_\beta+\nabla_\beta p_\alpha-2b_{\alpha\beta}p\right) \\
\frac{1}{c_2^2}\ddot{N}_\alpha-\nabla_\alpha\nabla_\beta N^\beta+b_{\alpha\beta}b^\beta_\gamma N^\gamma+\frac{12}{h^2}N_\alpha- \\
-\nabla_\alpha\left(b_{\gamma\delta}T^{\gamma\delta}\right)-b_{\alpha\beta}\nabla_\gamma T^{\gamma\beta}-\frac{12}{h^2}\nabla_\beta M^{\beta}_{\cdot\alpha}= \\
=\nabla_\alpha p+b_{\alpha\beta}p^\beta+\frac{12}{h^2}m_\alpha \\
\frac{1}{c_0^2}P_{\alpha\beta\gamma\delta}\ddot{M}^{\gamma\delta}-\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha\nabla_\gamma M^{\gamma}_{\cdot\beta}-\nabla_\beta\nabla_\gamma M^{\gamma}_{\cdot\alpha}\right)+ \\
+\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha N_\beta+\nabla_\beta N_\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha m_\beta+\nabla_\beta m_\alpha\right).
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь

$$
c_0^2=\frac{E}{\varrho}, \qquad c_2^2=\frac{\mu}{k\varrho}. \tag{2.2}
$$

Следовательно, уравнения (2.1) являются необходимыми условиями для системы (1.2)—(1.4).

Предположим, что начальные условия являются однородными

$$
\begin{gathered}
v_\alpha(x^\gamma,0)=w(x^\gamma,0)=\varphi_\alpha(x^\gamma,0)=T^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=N^\alpha(x^\gamma,0)=M^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=0 \\
\dot{v}_\alpha(x^\gamma,0)=\dot{w}(x^\gamma,0)=\dot{\varphi}_\alpha(x^\gamma,0)=\dot{T}^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=\dot{N}^{\alpha}(x^\gamma,0)=\dot{M}^{\alpha\beta}(x^\gamma,0)=0.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Пусть усилия и моменты $T^{\alpha\beta}$, N^{α}, $M^{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (2.1) и деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, ω_{α}, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — условиям (1.3). Если теперь перемещения и углы поворота определить через

$$v_{\alpha}(x^{\gamma},t)=\frac{1}{\varrho h}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)[\nabla_{\beta}T^{\beta}_{\cdot\alpha}(x^{\gamma},\tau)-b_{\alpha\beta}N^{\beta}(x^{\gamma},\tau)+p_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)]\,d\tau$$

$$w(x^{\gamma},t)=\frac{1}{\varrho h}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)[\nabla_{\alpha}N^{\alpha}(x^{\gamma},\tau)+b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}(x^{\gamma},\tau)+p(x^{\gamma},\tau)]\,d\tau \qquad (2.4)$$

$$\varphi_{\alpha}(x^{\gamma},t)=\frac{12}{\varrho h^{3}}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)[\nabla_{\beta}M^{\beta}_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)-N_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)+m_{\alpha}(x^{\gamma},\tau)]\,d\tau,$$

то v_{α}, w, φ_{α} удовлетворяют уравнениям движения (1.2) и v_{α}, w, φ_{α}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, ω_{α}, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — кинематическим соотношениям (1.4). Действительно, из определения (2.4) и начальных условий (2.3) непосредственно следует первое утверждение. Дифференцируя два раза по времени соотношения (2.4) и сочетая их с уравнениями (2.1), имеем

$$\frac{1}{Eh}P_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\gamma\delta\cdot\cdot}=\frac{1}{2}(\nabla_{\alpha}v_{\beta}^{\cdot\cdot}+\nabla_{\beta}v_{\alpha}^{\cdot\cdot}-2b_{\alpha\beta}w^{\cdot\cdot})$$

$$\frac{k}{\mu h}N_{\alpha}^{\cdot\cdot}=\varphi_{\alpha}^{\cdot\cdot}+\nabla_{\alpha}w^{\cdot\cdot}+b_{\alpha\beta}v^{\beta\cdot\cdot} \qquad (2.5)$$

$$\frac{12}{Eh^{3}}P_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\gamma\delta\cdot\cdot}=\frac{1}{2}(\nabla_{\alpha}\varphi_{\beta}^{\cdot\cdot}+\nabla_{\beta}\varphi_{\alpha}^{\cdot\cdot}).$$

Из этих соотношений при помощи соотношений (1.3) и начальных условий (2.3) следуют соотношения (1.4).

Итак, уравнения (2.1) являются необходимыми и достаточными условиями для удовлетворения уравнений и соотношений теории типа Тимошенко упругих оболочек (1.2)—(1.4).

Уравнения (2.1) позволяют непосредственно определить усилия $T^{\alpha\gamma}$, N^{α} и моменты $M^{\alpha\beta}$. Перемещения срединной поверхности v_{α}, w и углы поворота φ_{α} определяются через найденные усилия и моменты при помощи соотношений (2.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ignaczak J., Arch. Mech. Stos., **15**, No. 2, 225—234 (1963).
2. Айнола Л., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 3, 337—344 (1965).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/IV 1967

L. AINOLA

TIMOSHENKO TÜÜPI ELASTSETE KOORIKUTE TEOORIA VÕRRANDID JÕUDUDES JA MOMENTIDES

L. AINOLA

THE EQUATIONS OF THE TIMOSHENKO TYPE THEORY OF ELASTIC SHELLS IN STRESS AND COUPLE RESULTANTS