EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 4

И. КЕЙС

ОБ ЭКОНОМИИ ЭНЕРГИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОВОЗОВ

Методом Келли—Брайсона [1, 2] в работе рассмотрен вопрос минимизации затрат электроэнергии при движении электровоза некоторого типа между известными пунктами в предписанное время. Ограничения на управления и фазовые координаты устранены с помощью приема Валентайна [3]. В данной работе, использующей некоторые условия, результаты и обозначения статьи [4], учитывается, кроме того, норма перегрева двигателей электровоза.

1. Аналогично [4], уравнения движения центра масс электровоза, принадлежащего к системе постоянного тока с сериесными двигателями, имеют вид

$$mdv/dt = uF + G + S \tag{1.0}$$

$$ds/dt = v. \tag{1.1}$$

Здесь $m = m_1 + PR^{-2}$, m_1 — масса состава; P — полярный момент инерции вращающихся частей; R — радиус ведущих колес электровоза; $G = G(s)$ — сила сопротивления от уклона пути и $S = S(s, v)$ — главный вектор прочих сил внутреннего и внешнего сопротивления, определенных в работе [4] формулами (1.6), (3.5) и (1.8). Для касательной силы тяги $F = av^{-1}\eta(I)W$ коэффициенты a и $\eta(I)$ определяются формулами (62) и (63) из [5], а мощность W ограничивается сцепным весом в тоннах P_1 согласно неравенству

$$F \leqslant 10^3 P_1 (1 + \mu)^{-1} \psi_1(s, v), \tag{1.2}$$

в котором μ — коэффициент неравномерности касательной силы тяги, а функция $\psi_1(s, v)$ определяется формулой (1.9) работы [4].

Уравнения, определяющие «перегрев» обмоток двигателей и расход энергии E, рассмотрим в виде

$$d\tau/dt = \alpha_0 (1 - \delta_0 \tau) I^2 - \beta_0 \tau \tag{1.3}$$

$$dE/dt = uW, \tag{1.4}$$

где I — сила тока, причем для неизменного единичного тока и при температуре агрегатов двигателя ϑ_0, равной температуре ϑ° наружной среды в начальный момент времени t_0, комбинации параметров $\tau_\infty T^{-1}$, T^{-1} (см. [1], стр. 137) численно равны соответствующим постоянным α_0, β_0; δ_0 — некоторая малая характерная постоянная в законе сопротивления Ома.

Предполагая возможность непрерывной рекуперации и используя неравенство сцепления, определим ограничения на управления неравенствами

$$
\begin{gathered}
-1 \leqslant u \leqslant 1 \\
W_{(1)} \leqslant W \leqslant 10^3 P_1 a^{-1}(1+\mu)^{-1}\eta^{-1}(I) v\psi_1(s, v) = W_{(2)}(s, v, I) \qquad (1.5) \\
I_{(1)} \leqslant I \leqslant I_{(2)},
\end{gathered}
$$

а фазовые координаты подчиним условиям

$$
\begin{gathered}
v_{(1)}(s) < v < v_{(2)}(s) \\
\tau < \tau_{(2)},
\end{gathered} \qquad (1.6)
$$

где величины с индексами 1 и 2 в скобках постоянные или заданные функции от указанных аргументов. Граничные условия задачи суть:

$$
\begin{array}{lll}
s(0)=0 & \tau(0)=\tau_0^{(0)} & s(T)=s_1 \\
v(0)=v_0 & E(0)=0 & v(T)=v_1.
\end{array} \qquad (1.7)
$$

Начальный момент времени t_0 совмещен для удобства с нулем, так что T — момент прибытия состава в точку непосредственной близости конца рейса.

Задачу минимизации электроэнергии, затраченной для движения состава, сформулируем в предложении:

для множества управлений, подчиненных ограничениям (1.5), указать способ построения оптимальных, т. е. таких, при которых функционал расхода энергии E примет в заданный момент T минимальное значение для всех допустимых траекторий, отвечающих уравнениям (1.0), (1.1), (1.3), (1.4), ограничениям (1.6) и условиям (1.7).

Согласно приему Валентайна [3], освободим управления и координаты от неравенств (1.5) и (1.6), прибегнув к новым переменным

$$
\begin{gathered}
x_0 = E \\
x_1 = S \\
v_{(1)}(s) + (v_{(2)}(s) - v_{(1)}(s))(1+\exp x_2)^{-1} = v \\
\tau_2(1-\exp x_3) = \tau
\end{gathered} \qquad (1.8)
$$

$$
\begin{gathered}
\sin u_1 = u \\
0{,}5\,[W_{(1)} + W_{(2)} + (W_{(2)} - W_{(1)})\sin u_2] = W \\
0{,}5\,[I_{(2)} + I_{(1)} + (I_{(2)} - I_{(1)})\sin u_3] = I.
\end{gathered} \qquad (1.9)
$$

Используя уравнения (1.0), (1.1), (1.3), (1.4) и новые значения координат и управлений, получим значения скоростей изменения новых координат

$$dx_0/dt = W_0 \sin u_1$$
$$dx_1/dt = v_{(1)} + (v_{(2)} - v_{(1)})(1 + \exp x_2)^{-1}$$
$$dx_2/dt = m^{-1}(v_{(1)} - v_{(2)})^{-1} \exp(-x_2)(1 + \exp x_2)^2 [F_0 \sin u_1 + G + S_0 - - 0{,}5m(\partial V^2/\partial x_1)] \tag{1.10}$$
$$dx_3/dt = (\alpha_0\delta_0 I^2 + \beta_0)[\exp(-x_3) - 1] - \alpha_0\tau_2^{-1} I^2 \exp(-x_3).$$

Величины W_0, F_0, S_0 имеют значения

$$W_0 = W_0(x_1, x_2, u_2, u_3) = 0{,}5[W_{(1)} + W_{(2)}^{(0)} + (W_{(2)}^{(0)} - W_{(1)}) \sin u_2]$$
$$W_2^{(0)} = 10^3 P_1 a^{-1}(1 + \mu)^{-1} \eta_0^{-1}(u_3)[v_{(1)} + (v_{(2)} - v_{(1)})(1 + + \exp x_2)^{-1}] \psi_1(x_1, v_{(1)} + (v_{(2)} - v_{(1)})(1 + \exp x_3)^{-1})$$
$$F_0 = a[v_{(1)} + (v_{(2)} - v_{(1)})(1 + \exp x_2)^{-1}]^{-1} \eta_0(u_3) W_0$$
$$\eta_0 = \eta\{0{,}5[I_{(2)} + I_{(1)} + (I_{(2)} - I_{(1)}) \sin u_3]\}$$
$$S_0 = S(x_1, v_{(1)} + (v_{(2)} - v_{(1)})(1 + \exp x_2)^{-1}).$$

Обозначим правые части уравнений (1.10) через $-X_0(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)$, $-X_1(x_1, x_2)$, $-X_2(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)$, $-X_3(x_3, u_3)$, а из равенств (1.7) и (1.8) определим граничные условия для новых координат

$$x_0(0) = 0 \qquad x_2(0) = \ln\{[v_{(2)}(0) - v_{(1)}(0)][v_0 - v_{(1)}(0)]^{-1} - 1\}$$
$$x_1(0) = 0 \qquad x_3(0) = \ln[1 - \tau_2^{-1} \tau_0^{(0)}]. \tag{1.11}$$

$$x_1(T) = s_1, \quad x_2(T) = \ln\{[v_{(2)}(s_1) - v_{(1)}(s_1)][v_1 - v_{(1)}(s_1)]^{-1} - 1\}. \tag{1.12}$$

2. Воспользуемся методом построения оптимального вектора управлений u_1, u_2, u_3, предложенного в [1, 2], при обозначениях работы [6]. Тогда равенства (1.11) определяют начальные условия задачи минимизации, а условия (1.12) — ограничения на функционалы I_q работы [6] ($q = \overline{1, 2}$; $r = \overline{0, 2}$). Известное время процесса T заменяет здесь функционал F; ясно, что F, $I_q \subset C^2$. Для функций Лагранжа имеем уравнения

$$d\lambda_i^{(r)}/dt = \lambda_s^{(r)} \partial X_s/\partial x_i \qquad (i, s = \overline{0, 3}) \tag{2.0}$$

и граничные условия

$$\lambda_{i1}^{(r)} = \lambda_i^{(r)}(T) = -\partial I_r/\partial x_i$$
$$\begin{array}{llll} \lambda_{01}^{(0)} = -1, & \lambda_{11}^{(0)} = 0, & \lambda_{21}^{(0)} = 0, & \lambda_{31}^{(0)} = 0 \\ \lambda_{01}^{(1)} = 0, & \lambda_{11}^{(1)} = -1, & \lambda_{21}^{(1)} = 0, & \lambda_{31}^{(1)} = 0 \\ \lambda_{01}^{(2)} = 0, & \lambda_{11}^{(2)} = 0, & \lambda_{21}^{(2)} = -1, & \lambda_{31}^{(2)} = 0. \end{array} \tag{2.1}$$

Функции влияния суть

$$\Phi_r^{(j)} = \lambda_{(i)}^r \frac{\partial X_{(i)}}{\partial u_{(j)}} \qquad (j = \overline{1, 3}). \tag{2.2}$$

В качестве нулевого приближения вектора управления $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$ изберем тот, который соответствует наилучшему практическому регулированию движения электровоза. На этом режиме условия F и I_q всегда выполняются. Интегрируя систему уравнений (1.10) и (2.0) (последнюю в обратном направлении при условиях (2.1)), получим функции влияния (2.2) в зависимости от времени и фундаментальные вариации функционалов x_0, I_q согласно формулам (3.4) работы [6]

$$\Psi_{rs}^{(j)} = \int_0^{t_k} \Phi_r^{(j)} \Phi_s^{(j)} \, dt. \qquad (s = \overline{0, 2}).$$

Известно (см. [1, 2]), что изменение управления выражается формулой

$$\delta u_j^{(1)} = \mu_0^{(j)} \Phi_0^{(j)} + \mu_1^{(j)} \Phi_1^{(j)} + \mu_2^{(j)} \Phi_2^{(j)},$$

в которой постоянные $\mu_s^{(j)}$ связаны линейными зависимостями

$$\mu_1^{(j)} \Psi_{1s}^{(j)} + \mu_2 \Psi_{2s}^{(j)} = -\mu_0^{(j)} \Psi_{s0}^{(j)}.$$

Выбор величин $\mu_0^{(j)}$ и построение последующих поправок управления $u_j^{(k+1)}$ $(k \geqslant 1)$ осуществляется согласно § 4 работы [6] (стр. 662—666). Для исключения управлений, доставляющих величине x_0 минимакс, достаточно несколько исказить построенное после многих итераций стационарное решение так, чтобы $\Phi_0^{(j)}(t) \neq 0$ для $t \subset [0, T]$.

Минимум затрат энергии $x_0(T)$ можно считать найденным, если после искажения функций $u_j(t)$ новое решение совпадает с предшествовавшим.

Обсуждение. Предложенный процесс весьма трудоемок, так что реализация его потребует применения быстродействующих вычислительных машин. Поскольку для вычисления $\delta u_j^{(2)}$ необходимо уменьшение невязок $|\Delta I_q|$, отличных от нуля (ввиду того, что $\delta I_q - \Delta I_q \sim a_{ij} \delta u_i^{(1)} \delta u_i^{(1)}$), то алгоритм численного решения приобретет всю полноту работы [6]. Вместе с тем, учитывая сходство уравнений, изложенный прием можно применить для энергетической оптимизации движения паровозов и тепловозов в тех случаях, когда метод Понтрягина [7] вызывает аналитические и принципиальные (наподобие особых режимов) трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelley J., ARS Journal, **30**, 947 (1960).
2. Bryson A. E., Denham W. F., Carrol F. T., J. Aero/Space Sciences, 29 April 1962.
3. Valentine A., The problem of Lagrange with differential inequalities as side conditions, Dissertation, University of Chicago, 1937.
4. Кейс И., Изв. АН ЭССР. Физ. Мат., **16**, № 1, 54 (1967).
5. Бабичков А. М., Егорченко В. Ф., Тяга поездов, М., 1947.
6. Энеев Т. М., Космич. исследования, 4, вып. 5, 651 (1966).
7. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкреидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1960, с. 76—78.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/XII 1966

I. KEIS

ELEKTRIRONGI ENERGIAKULU VÄHENDAMISEST

Kelley-Brysoni meetodil vaadeldakse elektrirongi energiakulude minimiseerimist ette-antud ajaühiku jooksul. Juhtimis- ja faasikoordinaadid vabastatakse tõketest Valentine'i metoodika järgi.

I. KEIS

ON THE MINIMIZATION OF ENERGY IN THE MOTION OF AN ELECTRIC LOCOMOTIVE

The regulation process aiming at minimizing the energy of electric traffic traction in a prescribed time, is based on Kelley-Bryson's method. Constraints on the regulation and on the coordinates are eliminated with the help of Valentine's notice. The overheating of the motor is taken into account.