EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 4

Н. КРИСТОФЕЛЬ, Г. ЗАВТ, Т. ТАММ

К ТЕОРИИ НЕИДЕАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ ЧАСТОТ

Математически задача о нахождении токов в линейном электрическом фильтре нижних частот, состоящем из последовательно соединенных индуктивностей с параллельно заземленными емкостями между ними, эквивалентна нахождению колебаний атомной цепочки [1]. Эта аналогия должна распространяться также на неидеальные системы, содержащие дефекты, т. е. конденсаторы и индуктивности «аномальной» величины, либо соответственно примесный атом и т. д. [2]. В работе [3] рассмотрено влияние дефектов на концах фильтра, приводящих к локализованным состояниям тока, аналогичным поверхностным электронным уровням Тамма [4] *. Основной интерес представляет возможное возникновение локальных колебаний тока (аналогов локальных колебаний) с дискретными частотами вне области пропускания совершенного фильтра. Локальные колебания в фильтрах с дефектами типа «примеси», рассматриваемые в настоящей заметке, легко найти, поскольку для колебаний решетки эта задача решена (см., например, [2, 5, 6]).

Обозначая ток в n-й индуктивности i_n, имеем для идеального фильтра систему уравнений [1]

$$LC\frac{d^2 i_n}{dt^2} = i_{n+1} + i_{n-1} - 2i_n, \tag{1}$$

которую будем решать с периодическими граничными условиями

$$i_{n+N} = i_n. \tag{2}$$

Подстановка в (1)

$$i_n = I_n e^{i\omega t} \tag{3}$$

$$I_n = Ae^{in\varphi} \tag{4}$$

дает спектр пропускания идеального фильтра

$$\omega_0^2 = \frac{2}{LC}(1-\cos\varphi), \tag{5}$$

простирающийся от 0 до $\omega_M = \frac{2}{\sqrt{LC}}$, причем $\varphi = \frac{2\pi}{N}s$, $s = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}$.

---

* В свою очередь существует аналогия между задачами о колебаниях и электронных состояниях несовершенных кристаллов [2].

Локальные колебания в случае наличия различных дефектов в фильтре будем рассматривать в пределе $N \to \infty$, т. е. достаточно длинного фильтра. Тогда полоса пропускания идеального фильтра практически непрерывна, а условия возникновения локальных колебаний наименее жесткие [7].

1. «Индуктивный» дефект в элементе $n=0$ характеризуется параметром

$$\varepsilon = \frac{L'-L}{L}. \tag{6}$$

Уравнение для токов с учетом (3) имеет вид

$$LC\omega^2 I_n + \varepsilon LC\omega^2 I_n \delta_{n0} = 2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}, \tag{7}$$

решение которого может быть записано в виде

$$I_n = -\varepsilon\omega^2 I_0 \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\varphi} \frac{e^{in\varphi}}{\omega^2 - \omega_0^2(\varphi)} \right\}. \tag{8}$$

Величина в скобках представляет собой функцию Грина задачи (ср. [5, 6]). В пределе $N \to \infty$ она имеет вид

$$G_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\omega^2 - \omega_0^2(\varphi)}\, d\varphi \tag{9}$$

и при рассмотрении локальных колебаний не обладает полюсами в промежутке интегрирования. Тогда [5, 6]

$$G_n(\nu) = \frac{(-1)^n}{\omega_M^2 \nu \sqrt{\nu^2 - 1}} \left(2\nu^2 - 2\nu\sqrt{\nu^2 - 1} - 1\right)^{|n|}, \tag{10}$$

где

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_M}. \tag{11}$$

Уравнение для локальных частот получаем из (8), полагая $n=0$

$$1 = -\varepsilon\omega^2 G_0(\omega). \tag{12}$$

Отсюда следует

$$\omega_L^2 = \frac{\omega_M^2}{1-\varepsilon^2}. \tag{13}$$

Если $\varepsilon < 0$, т. е. индуктивность аномального элемента меньше, фильтр обладает дискретной частотой колебания ω_L над границей пропускания идеального фильтра. Соответствующие колебания тока определяются согласно (8) и (13) формулой

$$i_{nL} = (-1)^n \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{|n|} I_0 e^{i\omega_L t}. \tag{14}$$

Как видно из (14), величина токов спадает с удалением от аномальной индуктивности тем быстрее, чем больше ω_L отстоит от ω_M, т. е. чем сильнее возмущение.

Этот случай полностью эквивалентен возникновению локальных колебаний около изотопического дефекта в одноатомной цепочке, если учесть соответствие $C \to \gamma^{-1}$, $L \to M$ и $L' \to M'$, где γ — силовая постоянная, M и M' — массы основного атома цепочки и примеси соответственно.

2. «Емкостный» дефект величиной C' на месте $n = 0$ характеризуется параметром

$$\beta = \frac{C}{C'}. \tag{15}$$

Уравнения для токов имеют аналогично предыдущему пункту решение

$$I_n = \frac{\beta - 1}{LC} (I_0 - I_1)(G_n - G_{n-1}). \tag{16}$$

Из (16) следует, что нечетные локальные колебания ($I_0 = I_1$) возникнуть не могут. Для частоты четного локального колебания ($I_0 = -I_1$), полагая в (16) $n = 0$, имеем

$$\omega_L^2 = \omega_M^2 \frac{\beta^2}{(2\beta - 1)}. \tag{17}$$

Это локальное колебание возникает при условии $C' < C$, причем токи даны формулами

$$\begin{aligned} i_{nL} &= (-1)^n \left(\frac{1}{2\beta - 1}\right)^{|n|-1} I_0 e^{i\omega_L t} \qquad (n > 0) \\ i_{nL} &= (-1)^n \left(\frac{1}{2\beta - 1}\right)^{|n|} I_0 e^{i\omega_L t} \qquad (n < 0). \end{aligned} \tag{18}$$

Непосредственную аналогию с динамикой решетки здесь указать нельзя, так как этот случай соответствовал бы изобарическому дефекту, изменившему взаимодействие лишь с одним из своих соседей.

3. Два соседних емкостных дефекта (оба величиной C') при $n = 0$ и $n = 1$. Это случай, отвечающий изобарическому дефекту в одноатомной цепочке.

Уравнение для токов имеет вид

$$I_n = \frac{\beta - 1}{LC} [(I_0 - I_1)(G_n - G_{n-1}) + (I_1 - I_2)(G_{n-1} - G_{n-2})]. \tag{19}$$

Для четных локальных колебаний ($I_1 = 0$, $I_2 = -I_0$); отсюда получается частота

$$\omega_L^2 = \omega_M^2 \frac{\beta^2}{4(\beta - 1)} \tag{20}$$

при условии $C' < \frac{C}{2}$.

Величины токов следующие:

$$\begin{aligned} i_{nL} &= (-1)^n \left(\frac{1}{\beta - 1}\right)^{|n|-2} I_0 e^{i\omega_L t} \qquad (n > 0) \\ i_{nL} &= (-1)^n \left(\frac{1}{\beta - 1}\right)^{|n|-1} I_0 e^{i\omega_L t} \qquad (n < 0). \end{aligned} \tag{21}$$

Для частоты нечетных локальных колебаний ($I_1 \neq 0$, $I_2 = I_0$) получаем*

$$\omega_L^2 = \omega_M^2 \frac{\beta[3\beta - 4 + \sqrt{9\beta^2 - 8\beta}]}{8(\beta - 1)}. \tag{22}$$

4. Два соседних индуктивных дефекта при $n = 0$ и $n = 1$. В динамике решетки этому случаю соответствуют два соседних изотопических дефекта.

Имеем

$$I_n = -\varepsilon\omega^2(I_0 G_n + I_1 G_{n-1}), \tag{23}$$

откуда для частоты четных ($I_0 = -I_1$) локальных колебаний получаем

$$\omega_L^2 = \omega_M^2 \frac{1 + 4\varepsilon \pm \sqrt{1 - 8\varepsilon}}{8\varepsilon(\varepsilon + 1)}, \tag{24}$$

и для нечетных ($I_0 = I_1$)

$$\omega_L^2 = -\frac{\omega_M^2}{4\varepsilon(\varepsilon + 1)}. \tag{25}$$

5. Наконец рассмотрим фильтр, у которого нулевой элемент состоит из индуктивности L' и емкости C' и, кроме того, на месте $n = 1$ имеется емкость величиной C'. Эта система эквивалентна цепочке с примесным атомом, вносящим наряду с дефектом массы и свое взаимодействие с ближайшими соседями.

Система уравнений, определяющая токи, следующая:

$$\begin{aligned}
LC\omega^2 I_{-1} &= 2I_{-1} - I_{-2} - I_0 + (\beta - 1)(I_{-1} - I_0) \\
LC\omega^2 I_0 &= 2I_0 - I_1 - I_{-1} + (\beta - 1)(2I_0 - I_1 - I_{-1}) - \varepsilon L\omega^2 I_0 \\
LC\omega^2 I_1 &= 2I_1 - I_0 - I_2 + (\beta - 1)(I_1 - I_0) \\
LC\omega^2 I_n &= 2I_n - I_{n-1} - I_{n+1} \qquad n \neq 0, \pm 1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Четные локальные колебания здесь такие же, как в п. 3 для парного емкостного дефекта. Понятно, что наличие аномальной индуктивности при $n = 0$ не повлияет, аналогично массе примеси, на колебание, где $I_0 = 0$.

Для определения частот нечетных локальных колебаний получаем уравнение

$$4(\varepsilon + 1)^2(\beta - 1)\nu^4 - \beta(\varepsilon + 1)[(\varepsilon + 1)\beta + 2\beta - 4]\nu^2 - \beta^2 = 0. \tag{27}$$

Условия их существования следующие:

$$\beta \geqslant 2, \qquad \varepsilon \text{ — произвольно}$$

$$\beta < 2, \qquad \varepsilon \leqslant \frac{2(\beta - 1)}{2 - \beta}.$$

При $\beta = 1$ получаем из (27) локальные колебания п. 2, а при $\varepsilon = 0$ — нечетные колебания п. 3.

В итоге можно сказать, что путем включения различных дефектов в электрических фильтрах нижних частот легко добиться возникновения

* В сложных случаях область существования локальных колебаний требует специального исследования и здесь не указана.

локальных колебаний с дискретными частотами над границей пропускания ω_M. В отличие от динамики решетки параметры дефекта в фильтре варьировать легко, чем достигается изменение локальной частоты в достаточно широких пределах.

Однако вопрос о самом возбуждении локальных колебаний в фильтрах и снятии локального тока дискретной частоты с дефектной области требует специального обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриллюэн Л., Пароди М., Распространение волн в периодических структурах, М., 1959.
2. Кристофель Н. Н., Тр. Ин-та физ. и астрон., АН ЭССР, № 29, 3 (1964).
3. Краснушкин П. Е., Потемкин В. В., Вестн. МГУ, № 10, 33 (1949).
4. Tamm I., Phys. Z. Sowjetunion, 1, 733 (1932).
5. Марадудин А., Монтролл Э., Вейсс Дж., Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении, М., 1965.
6. Завт Г. С., Теория колебаний кристаллической решетки, Тарту, 1966.
7. Кристофель Н. Н., ФТТ, 4, 52 (1962).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/V 1967

N. KRISTOFFEL, G. ZAVT, T. TAMM

MITTEIDEAALSETE ELEKTRILISTE MADALSAGEDUSFILTRITE TEOORIAST

Lähtudes analoogiast lisandiaatomit sisaldava aatomketi võnkumistega, on leitud voolu lokaalvõnkumiste sagedused mitmesuguseid induktiivseid ja mahtuvuslikke defekte sisaldavates madalsagedusfiltrites. Tegemist on defektide lähikonnas toimuvate voolu võnkumistega, millede sagedus asub ülalpool ideaalse filtri läbilaskepiiri.

N. KRISTOFFEL, G. ZAVT, T. TAMM

ON THE THEORY OF NONIDEAL ELECTRICAL LOW-FREQUENCY FILTERS

Using the analogy with the vibrations of the linear lattice which contains impurity, the frequencies of the localized vibrations of the current in low-frequency filters with various inductive and capacitative defects are obtained.