EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 4

Э. ТАММЕ, И. СЫРМУС

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ

1. Рассмотрим уравнение переноса излучения для анизотропного рассеяния в плоско-параллельном слое

$$\mu\frac{\partial I(z,\mu,\varphi)}{\partial z}+\sigma(z,\mu,\varphi)I(z,\mu,\varphi)=$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\gamma(z,\mu,\varphi,\mu',\varphi')I(z,\mu',\varphi')d\mu'd\varphi'+f(z,\mu,\varphi) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned}&I(H,\mu,\varphi)=\alpha(\mu,\varphi) &&\text{при } \mu<0\\ &I(0,\mu,\varphi)=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0}\delta(\mu,\varphi,\mu',\varphi')I(0,\mu',\varphi')d\mu'd\varphi'+\\ &\quad+\beta(\mu,\varphi) &&\text{при } \mu>0\end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

В дальнейшем применим для решения этой задачи разностные методы. При этом уравнение (1) заменяем системой обыкновенных дифференциальных уравнений (4) или системой алгебраических уравнений (8). Указываются итерационные процессы для решения этих систем и исследуется погрешность таких методов.

Задача $\{(1), (2)\}$ возникает, например, при исследовании поля радиации в растительном покрове (см. [3]), причем второе граничное условие связано с отражением излучения на нижней границе слоя.

Предположим, что функции $\sigma(z,\mu,\varphi)$, $f(z,\mu,\varphi)$, $\alpha(\mu,\varphi)$, $\beta(\mu,\varphi)$, $\gamma(z,\mu,\varphi,\mu',\varphi')$ и $\delta(\mu,\varphi,\mu',\varphi')$ непрерывны в области $0\leqslant z\leqslant H$, $-1\leqslant\mu$, $\mu'\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi$, $\varphi'\leqslant 2\pi$ и что в этой области

$$\sigma(z,\mu,\varphi)>0,\ \gamma(z,\mu,\varphi,\mu',\varphi')\geqslant 0,\ \delta(\mu,\varphi,\mu',\varphi')\geqslant 0$$

$$\sigma(z,\mu,\varphi)-\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\gamma(z,\mu,\varphi,\mu',\varphi')\,d\mu'd\varphi'>0$$

и

$$1-\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0}\delta(\mu,\varphi,\mu',\varphi')\,d\mu'd\varphi'>0$$

(последние два условия выполнены, если при рассеянии происходит некоторое поглощение излучения).

Для получения приближенных методов решения задачи $\{(1), (2)\}$ возьмем некоторую кубатурную формулу

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(\mu, \varphi)\, d\mu d\varphi \approx \sum_{k=1}^{N} A_k \Phi(\mu_k, \varphi_k). \tag{3}$$

При этом предположим, что $A_k > 0$ и $\mu_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Узлы кубатурной формулы упорядочим так, чтобы было $\mu_k < 0$ при $k = 1, 2, \ldots, N_1$ и $\mu_k > 0$ при $k = N_1 + 1, \ldots, N$.

Введем обозначения

$$I_j(z) = I(z, \mu_j, \varphi_j), \quad \sigma_j(z) = \sigma(z, \mu_j, \varphi_j), \quad f_j(z) = f(z, \mu_j, \varphi_j), \quad \alpha_j = \alpha(\mu_j, \varphi_j),$$
$$\beta_j = \beta(\mu_j, \varphi_j), \quad \gamma_{jk}(z) = \gamma(z, \mu_j, \varphi_j, \mu_k, \varphi_k), \quad \delta_{jk} = \delta(\mu_j, \varphi_j, \mu_k, \varphi_k).$$

Заменяя интегралы в уравнении (1) и в граничных условиях (2) суммами на основании формулы (3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ср. [4])

$$\mu_j \frac{d I_j(z)}{dz} + \sigma_j(z) I_j(z) = \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{jk}(z) I_k(z) + f_j(z) \tag{4}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N)$$

и граничные условия для нее

$$\left.\begin{aligned} I_j(H) &= \alpha_j && \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1 \\ I_j(0) &= \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jk} I_k(0) + \beta_j && \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Ниже остановимся на вопросах, как решить последнюю задачу и какова погрешность приближенного решения задачи $\{(1), (2)\}$, найденного решением системы (4) при условиях (5).

При этом предполагаем, что

$$\sigma_j(z) - \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{jk}(z) \geqslant C > 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant H, \quad j = 1, 2, \ldots, N) \tag{6}$$

$$1 - \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jk} \geqslant c > 0 \qquad (j = N_1 + 1, \ldots, N) \tag{7}$$

и что можно оценить погрешности кубатурных формул

$$R_{jN}(z) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \gamma(z, \mu_j, \varphi_j, \mu', \varphi') I(z, \mu', \varphi')\, d\mu' d\varphi' - \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{jk}(z) I_k(z)$$

$$r_{jN} = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0} \delta(\mu_j, \varphi_j, \mu', \varphi') I(0, \mu', \varphi')\, d\mu' d\varphi' - \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jk} I_k(0).$$

2. При приближенном решении системы дифференциальных уравнений (4) производные в ней можно заменить разностями при помощи формулы

$$\frac{dI_j(z)}{dz}=\frac{I_j(z+h)-I_j(z)}{h}-\frac{h}{2}\,\frac{d^2I_j(\zeta)}{dz^2}\qquad (\zeta\in(z,\ z+h)),$$

которая верна, если $I_j''(z)$ непрерывна на отрезке $[z, z+h]$. Таким образом, система (4) заменяется системой алгебраических уравнений

$$L_1[I_{ij}]-L_2[I_{ij}]=f_{ij} \tag{8}$$

(при $j=1, 2, \ldots, N_1$ индекс $i=0, 1, \ldots, n-1$, а при $j=N_1+1, \ldots, N$ индекс $i=1, 2, \ldots, n$),

где

$$L_1[I_{ij}]=\begin{cases}\mu_j\dfrac{I_{i+1,j}-I_{ij}}{h}+\sigma_{ij}I_{ij} & \text{при } j=1,2,\ldots,N_1\\[2mm] \mu_j\dfrac{I_{ij}-I_{i-1,j}}{h}+\sigma_{ij}I_{ij} & \text{при } j=N_1+1,\ldots,N\end{cases}$$

$$L_2[I_{ij}]=\sum_{k=1}^{N}A_k\gamma_{ijk}I_{ik}$$

$$I_{ij}=I_j(z_i),\qquad \sigma_{ij}=\sigma_j(z_i),\qquad f_{ij}=f_j(z_i)$$

$$\gamma_{ijk}=\gamma_{jk}(z_i),\qquad z_i=ih,\qquad h=\frac{H}{n}.$$

Граничные условия (5) можно теперь записать в виде

$$\left.\begin{aligned} I_{nj}&=\alpha_j && \text{при } j=1,2,\ldots,N_1\\ l[I_{0j}]&=\beta_j && \text{при } j=N_1+1,\ldots,N\end{aligned}\right\}, \tag{5'}$$

где

$$l[I_{0j}]=I_{0j}-\sum_{k=1}^{N_1}A_k\delta_{jk}I_{0k}.$$

При оценке погрешности, возникающей при замене задачи $\{(1), (2)\}$ системой алгебраических уравнений $\{(8), (5')\}$, пользуемся леммой Коллатца (см. [1], стр. 128). Нетрудно убедиться, что при сделанных в пункте 1 предположениях система линейных уравнений $\{(8), (5')\}$ удовлетворяет условиям этой леммы, вследствие чего эта система имеет единственное решение I_{ij} и решение системы

$$L_1[J_{ij}]-L_2[J_{ij}]=F_{ij}$$

$$J_{nj}=a_j\qquad \text{при } j=1,2,\ldots,N_1$$

$$l[J_{0j}]=b_j\qquad \text{при } j=N_1+1,\ldots,N$$

является оценкой

$$|I_{ij}|\leqslant J_{ij}\qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

если

$$|f_{ij}|\leqslant F_{ij},\qquad |\alpha_j|\leqslant a_j,\qquad |\beta_j|\leqslant b_j.$$

Пусть $I(z_i, \mu_j, \varphi_j)$ является значением точного решения задачи $\{(1), (2)\}$, а I_{ij} — его приближением, найденным как решение системы $\{(8), (5')\}$. Обозначим погрешность через

$$\varepsilon_{ij} = I(z_i, \mu_j, \varphi_j) - I_{ij}$$

и предположим, что

$$\left|\frac{\partial^2 I(z, \mu, \varphi)}{\partial z^2}\right| \leqslant M_2 \quad \text{при } 0 \leqslant z \leqslant H, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Значения $I(z_i, \mu_j, \varphi_j)$ удовлетворяют соотношениям

$$L_1[I(z_i, \mu_j, \varphi_j)] - L_2[I(z_i, \mu_j, \varphi_j)] = f_{ij} + \frac{\Theta h}{2} M_2 + R_{jN}(z_i)$$

$$I(H, \mu_j, \varphi_j) = \alpha_j \qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1$$

$$l[I(0, \mu_j, \varphi_j)] = \beta_j + r_{jN} \qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N,$$

где $|\Theta| \leqslant 1$. Вычитая из этих равенств соответственно равенства (8) и (5′), получим

$$L_1[\varepsilon_{ij}] - L_2[\varepsilon_{ij}] = \frac{\Theta h}{2} M_2 + R_{jN}(z_i)$$

$$\varepsilon_{nj} = 0 \qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1$$

$$l[\varepsilon_{0j}] = r_{jN} \qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N.$$

Пусть

$$|R_{jN}(z)| \leqslant R_N \qquad (0 \leqslant z \leqslant H, \quad j = 1, 2, \ldots, N)$$

$$|r_{jN}| \leqslant r_N \qquad (j = N_1 + 1, \ldots, N).$$

Тогда, на основании леммы Коллатца, величины E_{ij}, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} L_1[E_{ij}] - L_2[E_{ij}] &\geqslant \frac{h}{2} M_2 + R_N \\ E_{nj} &\geqslant 0 \qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1 \\ l[E_{0j}] &\geqslant r_N \qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

являются оценками погрешности

$$|\varepsilon_{ij}| \leqslant E_{ij} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, N).$$

Самой простой возможностью является искать E_{ij} в виде постоянной $E_{ij} = E \geqslant 0$. Из условий (6) и (7) вытекает, что

$$L_1[E] - L_2[E] \geqslant CE \quad \text{и} \quad l[E] \geqslant cE.$$

Поэтому $E_{ij} = E$ удовлетворяет условиям (9), если

$$CE \geqslant \frac{h}{2} M_2 + R_N \quad \text{и} \quad cE \geqslant r_N.$$

Таким образом, получим оценку погрешности

$$|I(z_i, \mu_j, \varphi_j) - I_{ij}| = |\varepsilon_{ij}| \leqslant E = \max\left(\frac{1}{C}\left(\frac{h}{2} M_2 + R_N\right), \ \frac{1}{c} r_N\right) \tag{10}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, N).$$

Из последней оценки видим, что решение системы $\{(8), (5')\}$ I_{ij} приближается равномерно к решению задачи $\{(1), (2)\}$ $I(z_i, \mu_j, \varphi_j)$ при уменьшении h и увеличении N, если оценки R_N и r_N приближаются к нулю при увеличении N.

Уравнения (8) в пределе при $h \to 0$ преобразуются в дифференциальные уравнения (4). Поэтому из оценки (10) при $h = 0$ получим оценку погрешности для приближенного решения $I_j(z)$ задачи $\{(1), (2)\}$, найденного как решение задачи $\{(4), (5)\}$:

$$|I(z, \mu_j, \varphi_j) - I_j(z)| \leqslant \max\left(\frac{1}{C} R_N, \ \frac{1}{c} r_N\right)$$
$$(0 \leqslant z \leqslant H, \quad j = 1, 2, \ldots, N).$$

3. Система линейных уравнений $\{(8), (5')\}$ обычно решается при помощи некоторого итерационного метода. В работе [2], например, для решения этой системы при постоянных σ, γ и $\delta = 0$ применяются схемы расцепления.

Самым простым итерационным методом является

$$\left.\begin{aligned} &L_1[I_{ij}^{m+1}] = L_2[I_{ij}^{m}] + f_{ij} \\ &I_{nj}^{m+1} = \alpha_j \qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1 \\ &l[I_{0j}^{m+1}] = \beta_j \qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

где $m = 0, 1, \ldots$ и I_{ij}^0 — начальное приближение. Соотношения (11) являются простыми рекуррентными соотношениями для вычисления I_{ij}^{m+1}:

при $j = 1, 2, \ldots, N_1$ $\quad I_{nj}^{m+1} = \alpha_j$

$$I_{ij}^{m+1} = \frac{1}{-\mu_j + h\sigma_{ij}} \left(-\mu_j I_{i+1,j}^{m+1} + h \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{ijk} I_{ik}^{m} + h f_{ij}\right)$$
$$(i = n-1, n-2, \ldots, 0),$$

при $j = N_1 + 1, \ldots, N$

$$I_{0j}^{m+1} = \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jk} I_{0k}^{m+1} + \beta_j$$

$$I_{ij}^{m+1} = \frac{1}{\mu_j + h\sigma_{ij}} \left(\mu_j I_{i-1,j}^{m+1} + h \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{ijk} I_{ik}^{m} + h f_{ij}\right)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Исследуем сходимость итерационного процесса (11). Вычитая из равенств (11) соответствующие равенства с индексом m на единицу меньшим, получим

$$\begin{aligned} &L_1[I_{ij}^{m+1} - I_{ij}^{m}] = L_2[I_{ij}^{m} - I_{ij}^{m-1}] \\ &I_{nj}^{m+1} - I_{nj}^{m} = 0 \qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1 \\ &l[I_{0j}^{m+1} - I_{0j}^{m}] = 0 \qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Пусть известна оценка

$$| I_{ij}^{m} - I_{ij}^{m-1} | \leqslant \Delta_{m-1} \qquad (i=0, 1, \ldots, n, \quad j=1, 2, \ldots, N).$$

Тогда

$$| L_2 [I_{ij}^{m} - I_{ij}^{m-1}] | \leqslant \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{ijk} \Delta_{m-1} = L_2 [\Delta_{m-1}],$$

и на основании леммы Коллатца величина Δ_m, удовлетворяющая неравенствам

$$L_1 [\Delta_m] \geqslant L_2 [\Delta_{m-1}], \ \Delta_m \geqslant 0, \qquad l [\Delta_m] \geqslant 0$$

является оценкой

$$| I_{ij}^{m+1} - I_{ij}^{m} | \leqslant \Delta_m.$$

В силу условия (7) неравенство $l[\Delta_m] \geqslant 0$ следует из $\Delta_m \geqslant 0$. Неравенство $L_1 [\Delta_m] \geqslant L_2 [\Delta_{m-1}]$ или

$$\sigma_{ij} \Delta_m \geqslant \Delta_{m-1} \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{ijk}$$

выполняется при

$$\Delta_m = q \, \Delta_{m-1},$$

где $\displaystyle q = \max_{\substack{0 \leqslant z \leqslant H \\ 1 \leqslant j \leqslant N}} \frac{1}{\sigma_j(z)} \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{jk}(z).$

На основании условия (6)

$$\frac{1}{\sigma_j(z)} \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{jk}(z) \leqslant 1 - \frac{C}{\sigma_j(z)}.$$

Поэтому

$$q \leqslant 1 - \frac{C}{\min\limits_{z, j} \sigma_j(z)} < 1$$

и итерационный процесс (11) сходится со скоростью

$$\max_{i, j} | I_{ij}^{m} - I_{ij} | \leqslant \frac{q^m}{1-q} \max_{i, j} | I_{ij}^{1} - I_{ij}^{0} | \quad (m=0, 1, \ldots), \tag{12}$$

где I_{ij} — точное решение системы $\{(8), (5')\}$.

Переходя в (11) к пределу $h \to 0$, получим итерационный метод для решения задачи $\{(4), (5)\}$:

$$\mu_j \frac{dI_j^{m+1}(z)}{dz} + \sigma_j(z) I_j^{m+1}(z) = \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{jk}(z) I_k^{m}(z) + f_j(z) \tag{13}$$

$$(j=1, 2, \ldots, N)$$

$$I_j^{m+1}(H) = \alpha_j \qquad \text{при } j=1, 2, \ldots, N_1 \tag{14}$$

$$I_j^{m+1}(0) = \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jk} I_k^{m+1}(0) + \beta_j \qquad \text{при } j=N_1+1, \ldots, N. \tag{15}$$

Из (12) следует, что этот метод сходится со скоростью

$$\max_{z, j} |I_j^m(z) - I_j(z)| \leqslant \frac{q^m}{1-q} \max_{z, j} |I_j^1(z) - I_j^0(z)|.$$

Функции $I_j^{m+1}(z)$ можно найти следующим образом. Сначала решаются относительно $I_j^{m+1}(z)$ линейные дифференциальные уравнения (13) с начальными условиями (14) при $j=1, 2, \ldots, N_1$. Затем из (15) вычисляют $I_j^{m+1}(0)$ при $j=N_1+1, \ldots, N$, которые принимаются за начальные условия при решении остальных уравнений (13).

Итерационный процесс (11) можно рассматривать как приближенный метод первого порядка точности для решения дифференциальных уравнений (13). Но эти уравнения можно решить и более точными численными методами, что делает возможным достижение требуемой точности при больших h. Например, уравнения (13) можно решить методом второго порядка точности

$$2\mu_j \frac{I_{i+1,j}^{m+1} - I_{ij}^{m+1}}{h} + \sigma_{i+1,j} I_{i+1,j}^{m+1} + \sigma_{ij} I_{ij}^{m+1} = \sum_{k=1}^{N} A_k (\gamma_{i+1,jk} I_{i+1,k}^m + \gamma_{ijk} I_{ik}^m) + f_{i+1,j} + f_{ij}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., 1953.
2. Марчук Г. И., Султангазин У. М., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 5, 852—863 (1965).
3. Росс Ю. К., Математическое моделирование поля фотосинтетически активной радиации в растительном покрове, Сб. Актинометрия и оптика атмосферы, М., 1964, с. 251—256.
4. Keller H. B., Convergence of the Discrete Ordinate Method for the Anisotropic Scattering Transport Equation, Sympos. Numerical Treatm. Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-differential Equations, Berlin-Stuttgart, 1960, pp. 292—299.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
18/IV 1967

E. TAMME, I. SÕRMUS

KIIRGUSE ÜLEKANDEVÕRRANDI LAHENDAMISEST ANISOTROOPSE HAJUMISE KORRAL

Vaadeldakse kiirguse ülekande võrrandit (1) rajatingimustega (2). Selle ülesande lähislahendi leidmiseks moodustatakse harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem (4) rajatingimustega (5). Seejuures asendatakse integraalid summadega mingi kvadratuurvalemi abil. Diferentsiaalvõrrandisüsteemi numbrilisel lahendamisel jõutakse algebralise võrrandisüsteemini {(8), (5′)}. Viimasest leitud lähislahendi jaoks tuletatakse maksimumiprintsiibi abil veahinnangud. Võrrandisüsteemi {(8), (5′)} tegelikuks lahendamiseks kasutatakse iteratsiooniprotsessi (11), näidatakse selle koonduvus ja koonduvuskiirus.

E. TAMME, I. SÕRMUS

ON THE SOLUTION OF ANISOTROPIC SCATTERING TRANSPORT EQUATION

The transport equation (1) with boundary conditions (2) is examined. With a view to obtain an approximate solution, a system of ordinary differential equations (4) with boundary conditions (5) is formed. The integrals are replaced by sums obtained from quadrature formulas; the numerical solution of the system of differential equations leads to the system {(8), (5′)} of algebraic equations. An application of the principle of maximum will give the estimation of error. The system {(8), (5′)} is solved by the iteration process (11), the convergence is established and the convergence rate determined.