Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1992, 41, 3, 207—211
https://doi.org/10.3176/phys.math.1992.3.04

УДК 530.1

Николай КРИСТОФЕЛЬ *

СТАТИСТИКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА (МЕТОДИЧЕСКАЯ ЗАМЕТКА)

(Представил В. Хижняков)

Обычные квантовые функции распределения частиц по энергиям в условиях статистического равновесия отвечают случаям, когда в минимальной ячейке фазового пространства (h^3) могут максимально находиться либо только одна частица ($m=1$, распределение Ферми—Дирака), либо бесконечно большое число частиц ($m=\infty$, распределение Бозе—Эйнштейна).

В настоящее время в различных областях теоретической физики стали рассматриваться возбуждения, не являющиеся строго ни фермионами, ни бозонами. Возможно, что применительно к неким конкретным задачам небезынтересно рассмотрение квантовых статистик, промежуточных относительно статистик Ферми и Бозе по конечному максимально допустимому числу частиц в минимальной ячейке фазового пространства. Соответствующие результаты приводятся в настоящем сообщении.

1. Функция распределения

Будем рассматривать идеальный газ частиц как поле и применим к осцилляторам поля каноническое распределение, определив статистический вес

$$G=\prod_i Z_i^{Z_i}\Big[\prod_i\prod_n Z_{in}^{Z_{in}}\Big]^{-1}. \tag{1}$$

Здесь Z_{in} — число осцилляторов с энергией $\varepsilon_i=h\nu_i$, содержащих n квантов; Z_i — число осцилляторов с частотой ν_i. Наибольший статистический вес отвечает распределению

$$Z_i=\sum_{n=0}^{\infty} Z_{in}=e^{\alpha_i}\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\left(\gamma-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)}=\sigma_i e^{\alpha_i}. \tag{2}$$

Здесь α_i и γ — константы, появляющиеся в связи с требованиями постоянства полного числа частиц и осцилляторов при данной частоте.

* Eesti Teaduste Akadeemia Füüsika Instituut (Институт физики Академии наук Эстонии). EE2400 Tartu, Riia 142. Estonia.

Выполняя суммирование в (2), имеем

$$Z_i = e^{\alpha_i} \frac{1-e^{(m+1)\left(\gamma-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)}}{1-e^{\gamma-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}. \tag{3}$$

Средняя энергия осциллятора выражается соответственно как

$$\bar{\varepsilon}_{in} = \varepsilon_i Z_i^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n Z_{in} = N_i \varepsilon_i Z_i^{-1}, \tag{4}$$

а среднее число частиц с энергией ε_i равно

$$N_i = \frac{Z_i \left[m e^{(m+1)\left(\gamma-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)} - (m+1) e^{m\left(\gamma-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)} + 1 \right]}{\left(e^{-\gamma+\frac{\varepsilon_i}{kT}} - 1\right)\left(1-e^{(m+1)\left(\gamma-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)}\right)}. \tag{5}$$

Это и есть искомая функция распределения. Легко усмотреть, что при $m=1$ и $m\to\infty$ из (5), соответственно, следуют распределения Ферми и Бозе. Аналогичный результат получен в теории многослойной адсорбции газа [1].

К непрерывному распределению dN по энергии придем, взяв в (5) для квазисвободных частиц

$$Z_i = \frac{2\pi g (2M)^{3/2} v}{h^3} E^{1/2}\, dE, \tag{6}$$

где M — масса частицы, g — учитывает ее спин, а v — объем системы. Связь спина частицы (или неких других степеней свободы) со значением m остается неизвестной, за исключением предельных случаев $m=1$ и $m=\infty$, составляя самостоятельную проблему. Имеется ли ее решение, также неизвестно.

2. Термодинамическая функция

Положив $\gamma = \ln A + \frac{Mc^2}{kT}$, для энтропии S и статистической суммы σ, имеем соответсвенно

$$S = \frac{U}{T} + k \ln \sigma, \tag{7}$$

$$\ln \sigma = \sum_i Z_i \ln \sigma_i - N \ln A, \tag{8}$$

где U — внутренняя энергия

$$U = kT^2 \frac{\partial \ln \sigma}{\partial T}. \tag{9}$$

Вводя обозначения $\alpha = \ln A$ и $x = \frac{E}{kT}$, плотность частиц n и U выразим как

$$n = \frac{g}{h^3} (2\pi MkT)^{3/2} G_{1/2}(\alpha), \tag{10}$$

$$U = \frac{3kTvg}{2h^3} (2\pi MkT)^{3/2} G_{3/2}(\alpha), \tag{11}$$

причем

$$G_{1/2}(\alpha)=\frac{dG_{3/2}(\alpha)}{d\alpha},$$

$$G_{3/2}(\alpha)=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{m-(m+1)e^{x-\alpha}+e^{(m+1)(x-\alpha)}}{(e^{(m+1)(x-\alpha)}-1)(e^{x-\alpha}-1)}x^{3/2}\,dx. \qquad (12)$$

Имеем еще (F — свободная энергия) соотношения

$$\ln\sigma=\frac{2}{3}\frac{U}{kT}-N\alpha, \qquad (13)$$

$$S=\frac{5}{3}\frac{U}{T}-Nk\alpha, \qquad (14)$$

$$F=NkT\alpha-\frac{2}{3}U. \qquad (15)$$

Уравнение состояния также обычного вида (p — давление)

$$pv=\frac{2}{3}U, \qquad (16)$$

однако U, конечно, определено (11) и зависит от m.

3. Низкие температуры

В случае низких температур, как и в обычных случаях, $A\gg 1$, т. е. $\alpha\gg 1$. Разложения вспомогательных функций по обратным степеням α с учетом первых двух членов имеют вид

$$G_{1/2}(\alpha)=\frac{4m}{3\sqrt{\pi}}\alpha^{3/2}\left[1+\frac{1}{m+1}\cdot\frac{\pi^2}{4\alpha^2}\right],$$

$$G_{3/2}(\alpha)=\frac{4m}{3\sqrt{\pi}}\alpha^{5/2}\left[\frac{2}{5}+\frac{1}{m+1}\cdot\frac{\pi^2}{2\alpha^2}\right]. \qquad (17)$$

Итерационным путем на основании (10) и (17) находим приближенное значение α через плотность частиц

$$\alpha=\alpha_0\left[1-\frac{1}{m+1}\cdot\frac{\pi^2}{6\alpha_0^2}\right], \qquad (18)$$

$$\alpha_0=\frac{h^2}{4\sqrt[3]{2}\,MkT}\left(\frac{3n}{\pi mg}\right)^{2/3} \qquad (19)$$

Внутренняя энергия, энтропия и уравнение состояния газа даны выражениями

$$U=\frac{3}{5}NkT\alpha_0\left[1+\frac{1}{m+1}\cdot\frac{5\pi^2}{6\alpha_0^2}\right], \qquad (20)$$

$$S=\frac{Nk\pi^2}{(m+1)\alpha_0}, \qquad (21)$$

$$pv = \frac{2}{5} NkT\alpha_0 \left[1 + \frac{1}{m+1} \frac{5\pi^2}{6\alpha_0^2}\right]. \tag{22}$$

При $T \to 0$ из (5) и (6) имеем

$$\frac{dN}{dE} = \frac{2\pi g (2M)^{3/2} v}{h^3} E^{1/2} m \quad \text{при} \quad E < E_0,$$

$$\frac{dN}{dE} = 0 \quad \text{при} \quad E > E_0, \tag{23}$$

причем $\alpha = \alpha_0$, $E_0 = kT\alpha_0$,

$$\lim_{T \to 0} (kT\alpha_0) = \frac{h^2}{4\sqrt[3]{2}M} \cdot \left(\frac{3n}{\pi g m}\right)^{2/3}. \tag{24}$$

Из (23) следует, что с ростом m «энергии Ферми» $E_0(m)$ уменьшаются, а ординаты распределения возрастают, стремясь к оси ординат, которой отвечает $m \to \infty$. Такое поведение естественно, так как чем больше частиц может быть в минимальном объеме фазового пространства, тем раньше они будут исчерпаны при его плотном заселении. При $T = 0$, $S = 0$ и имеем

$$U = \frac{3Nh^2}{20\sqrt[3]{2}M} \left(\frac{3n}{\pi g}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{m^{2/3}}, \tag{25}$$

так что $pv^{5/3} = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Т.* Статистическая механика. Москва, ИЛ, 1960.

Поступила в редакцию
20/XII 1991

Nikolai KRISTOFFEL

STATISTIKAD MEELEVALDSE MAKSIMAALSE LUBATUD OSAKESTE ARVUGA FAASIRUUMI RAKUS (METOODILINE MÄRKUS)

On leitud jaotusfunktsioon ja statistilised põhikarakteristikud ideaalse kvantgaasi jaoks meelevaldse maksimaalse lubatud osakeste arvu korral minimaalses faasiruumi rakus.

Nikolai KRISTOFFEL

STATISTICS WITH ARBITRARY MAXIMAL ALLOWED NUMBER OF PARTICLES IN THE CELL OF THE MOMENTUM SPACE (METHODICAL NOTE)

The distribution function and the major statistical characteristics for an ideal quantum gas with arbitrary finite allowed maximal number of particles in the minimal cell of the momentum space have been obtained.