Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 3, 296—298
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.3.15

УДК 534.22 : 539.3

Анатолий СТУЛОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕДАХ ПРЯМЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Anatoli STULOV. MITTELINEAARSETE MÄLUGA KESKKONDADE STATSIONAARSETE LAINELEVIÜLESANNETE TÄPNE LAHENDAMINE OTSESE ALGEBRALISE MEETODIGA

Anatoli STULOV. EXACT SOLUTION OF A PROBLEM OF A SOLITARY WAVE PROPAGATION IN NON-LINEAR HEREDITARY MEDIA USING A DIRECT ALGEBRAIC METHOD

(Представил Х. Абен)

Введение. Известно, что в нелинейных наследственных средах с памятью или в вязкоупругих средах возможно распространение акустических импульсов постоянного профиля, скорость которых зависит от величины амплитуды разрыва на фронте [1, 2]. В данной работе предлагается алгебраический метод построения точных решений интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядков, описывающих форму импульса, распространяющегося в нелинейных наследственных средах без искажения формы. Этот метод использует тот факт, что стационарное решение нелинейных дисперсионных или волновых уравнений рассматривается как пакет гармонических волн (решений линейного уравнения), в котором скорости и фазы составляющих его плоских волн связаны нелинейностью так, что пакет не распадается. Такой подход позволяет не только построить профиль стационарной волны, но и определить зависимость скорости ее распространения от величины амплитуды волны на фронте.

Постановка задачи. Пусть в нелинейной наследственной среде распространяется в положительном направлении оси x одномерная акустическая волна, которая описывается интегродифференциальным уравнением первого порядка

$$cf(U')\,U'(x,t)+\dot U(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t K(t-\tau)\,\dot U(x,\tau)\,d\tau=0, \tag{1}$$

или волновым уравнением

$$\ddot U(x,t)-c^2f(U')\,U''(x,t)+\int_0^t K(t-\tau)\,\ddot U(x,\tau)\,d\tau=0, \tag{2}$$

при нулевом начальном условии $U(x,0)=0$ и краевом условии $U(0,t)=H(t)\,\psi(t)$, где $U(x,t)$ — продольное перемещение; c — скорость звука в линейной среде; $K(t)$ — ядро ползучести; $f(U')$ — функция нелинейности; $H(t)$ — функция Хевисайда; штрих — обозначает производную по x, а точка — производную по t.

Выберем функцию нелинейности в виде

$$f(U')=1+\alpha U'(x,t), \tag{3}$$

так что при малых деформациях $U'(x,t)\ll 1$, уравнения (1) и (2) описывают волны в линейных наследственных средах. Ядро ползучести наследственной среды выберем в виде

$$K(t)=(\varepsilon/\tau)\exp(-t/\tau), \tag{4}$$

где ε и τ — наследственные параметры среды. Такое ядро ползучести для уравнения (1) соответствует среде с т. н. E-памятью [3], а для уравнения (2) — стандартной вязкоупругой среде.

Построение решения. Будем искать решение уравнений (1) и (2) в виде распространяющейся в положительном направлении оси x с постоянной скоростью v волны постоянного профиля

$$U(x,t)=H(\xi)\psi(\xi),\quad \xi=(2\tau)^{-1}(t-x/v). \tag{5}$$

Тогда из уравнения (1), введя обозначения

$$\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}=\psi'(\xi)=\frac{2\tau\varepsilon v^2}{\alpha c}y(\xi),\quad 1-\frac{c}{v}=a\varepsilon, \tag{6}$$

для всех $\xi>0$ получим интегральное уравнение

$$y(\xi)[a+y(\xi)]+\int_0^\xi e^{2(\omega-\xi)}y(\omega)d\omega=0 \tag{7}$$

с условием $y(0)=-a$.

Для того чтобы получить стационарное решение (5) уравнения (2), предположим, что функция $\psi(\xi)$ в (5) определяет отличный от нуля разрыв скорости $[\dot U]$ на фронте $\xi=0$, величину которого можно получить из закона сохранения количества движения [4]

$$[\dot U]=\frac{2v}{\alpha}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\psi'(\xi)=\frac{2\tau\varepsilon v^3}{\alpha c^2}w(\xi),\quad \psi(0)=0. \tag{9}$$

Тогда из уравнения (2) получим уравнение

$$w'(\xi)[b+w(\xi)]-2b+2\int_0^\xi e^{2(\omega-\xi)}w'(\omega)d\omega=0 \tag{10}$$

с начальным условием, которое следует из условия разрыва на фронте (8)

$$w(0)=-2b,\quad b=\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right). \tag{11}$$

Уравнения (7) и (10) могут быть проинтегрированы в явном виде, но получаемый вид решения не только не удобен для построения профиля волн, но и не позволяет определить зависимость скорости волны постоянного профиля от величины амплитуды волны на ее фронте.

Будем искать решения уравнений (7) и (10) в виде $\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp(-np\xi)$, где $a_n=\mathrm{const}$, а p — параметр. Тогда алгебраическими методами можно установить, что решения имеют вид

$$y(\xi)=T(p,\xi), \quad a=a(p)=(1-p)/(p-2), \tag{12}$$

$$w(\xi)=4T(p,\xi), \quad b=b(p)=2a(p), \tag{13}$$

где

$$T(p,\xi)=\frac{2p}{p-2}\left[1-(p-1)\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n e^{-np\xi}\right], \tag{14}$$

$$b_n=\frac{\Gamma(np-1)}{\Gamma(n)\Gamma(np-n+1)},$$

$$q=\frac{2-p}{2(p-1)}\left[\frac{2(p-1)}{p}\right]^p,$$

а $\Gamma(x)$ — гамма-функция. При этом ряд (14) сходится равномерно для всех $1<p\leqslant p_0$, где $p_0=2{,}3833$ — корень уравнения $p_0=2(1+2^{-p_0})$.

Из условий (6), (11) и (12), (13) можно найти зависимость скорости волны от параметра p. Для уравнения (7) получим

$$v(p)=c[1-\varepsilon a(p)]^{-1}, \tag{15}$$

а для уравнения (10)

$$v(p)=c[1-\varepsilon b(p)]^{-1/2}. \tag{16}$$

Эти соотношения полностью определяют зависимость скорости волны от ее амплитуды на фронте.

Учитывая ограниченную область изменения параметра p, очевидно, что в наследственной среде с квадратичной нелинейностью могут распространяться волны постоянного профиля двух типов. Первый — это «быстрые» волны, бегущие со скоростью $v\geqslant c$. Этим волнам соответствует область изменения параметра $1<p\leqslant p_1$, где для среды с E-памятью $p_1=1+(1+\varepsilon)^{-1}$, а для стандартной вязкоупругой среды $p_1=2(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)^{-1}$.

Другой тип волн — «медленные», бегущие со скоростью $v\leqslant v_1<c$, где $v_1=v(p_0)$ для соответствующей скорости волны в каждой из рассматриваемых сред. Интервал значений параметра $p_1<p<2$ является «запретным», так как при таких значениях параметра p волны постоянного профиля в рассматриваемых средах существовать не могут.

Заключение. Алгебраический подход к построению стационарного решения уравнения Кортевега—де Вриза был ранее использован в работе [5], но там задача решалась без начальных условий. Оказывается, что этот метод может быть полезным и при решении других задач. Выбор же экспонент в качестве базиса решения удобен не только потому, что с таким рядом можно обращаться также легко как и со степенным, но и потому что полученное решение на бесконечности всегда будет ограниченным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nigul, U.* // IUTAM Symposium. Tallinn, Estonian SSR, 1982. Nonlinear deformation waves. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1983, 255—272.
2. *Стулов А.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1986, 35, № 2, 201—203.
3. *Nigul, U.* // Preprint Acad. Sci. SSR. Tallinn. 1983, 62.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.
5. *Hereman, W., Banerjee, P. P., Korpel, A., Assanto, G. Van Immerzeele, A., Meerpoel. A.* // J. Phys. A: Math. Gen., 1986, **19**, 607—628.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонии

Поступила в редакцию
24/I 1990