

УДК 539.3; 534.1

Наум ВЕКСЛЕР

РАССЕЯНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ УПРУГОЙ СФЕРОЙ

(Представил Х. Абел)

Рассматривается стационарная задача о рассеянии плоской акустической волны давления полый пустой упругой сферой. Используются обозначения, принятые в [1]. Точное решение задачи в виде ряда Рэлея приведено в [2]. Целью данной работы является выяснение закономерностей формирования функции формы, а основным рабочим инструментом — процедура резонансной теории рассеяния [3–5].

Расчеты выполнены для алюминиевой сферы, погруженной в воду, при следующих значениях параметров алюминий: $\rho_1 = 2,79 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_l = 6380$ м/с, $c_t = 3100$ м/с; вода: $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м³, $c = 1470$ м/с. Относительная толщина оболочки $h = 1 - b/a = 1/10$. Здесь a, b — наружный и внутренний радиусы сферы. Счет проведен в диапазоне $0 \leq x = ka \leq 400$ с шагом счета $l_x = 10/256$.

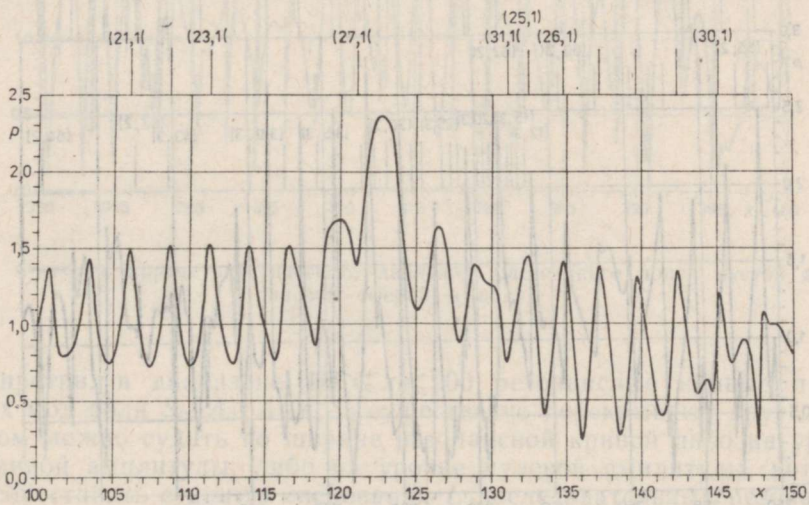
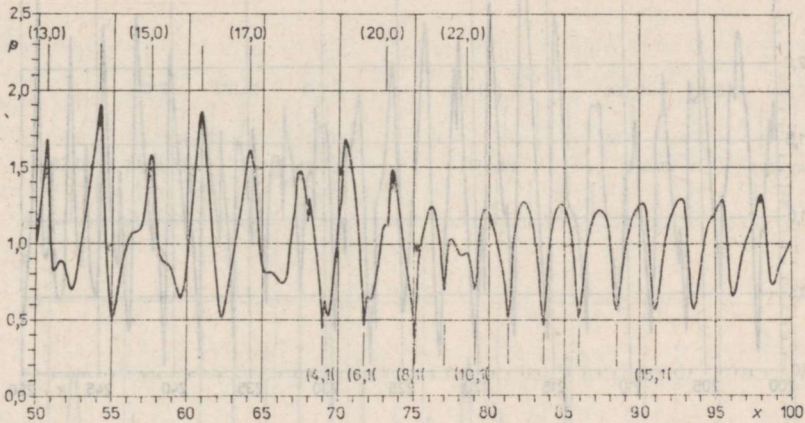
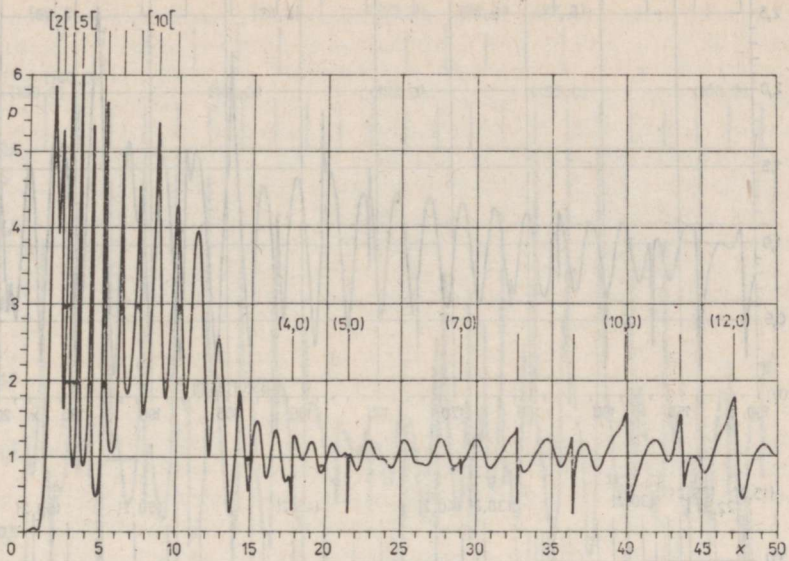
На рис. 1 представлен график функции формы. Ее экстремумы, соответствующие резонансным частотам парциальных мод, маркированы парой цифр n, l . Первая из них указывает порядковый номер резонанса, а вторая — семейство. Падающая волна возбуждает в сфере периферические волны типа Лэмба. Резонансы симметричных (S_l) волн отмечены скобками (), а антисимметричных волн (A_l) — скобками ((. При малых значениях x в сфере возбуждается волна A . Ее резонансы отмечены скобками [].

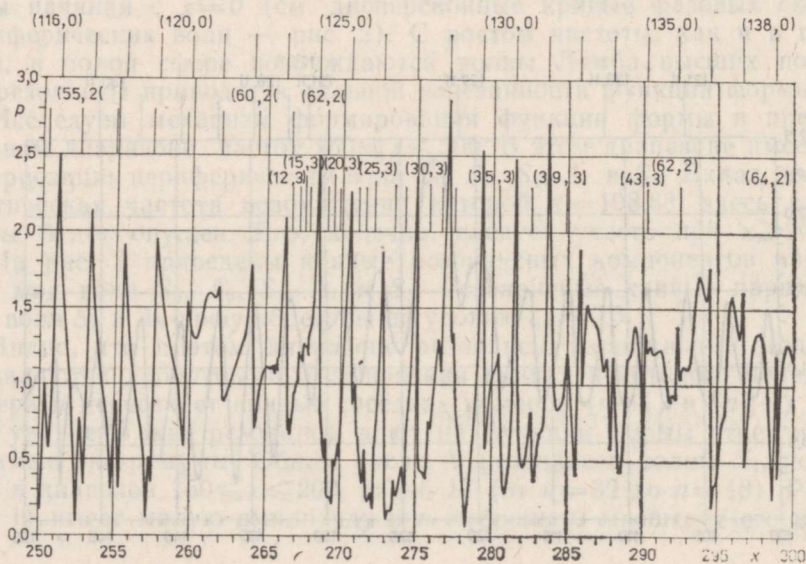
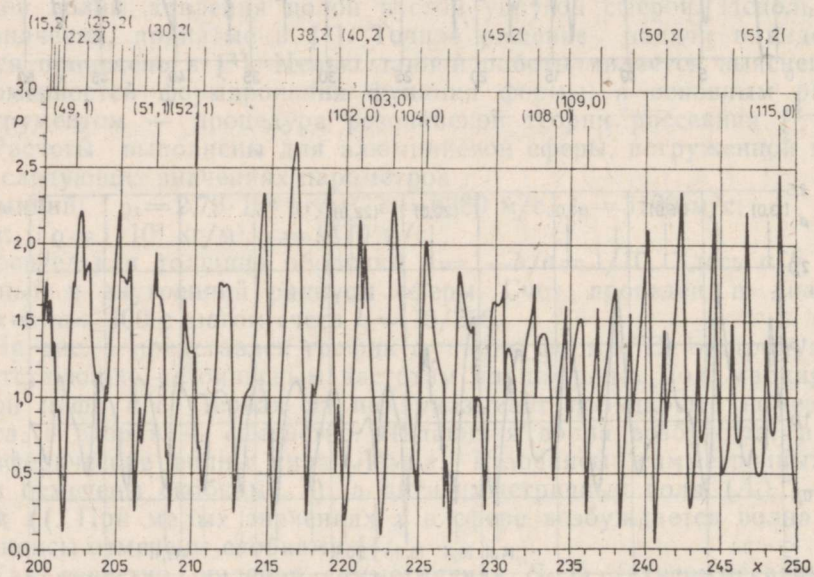
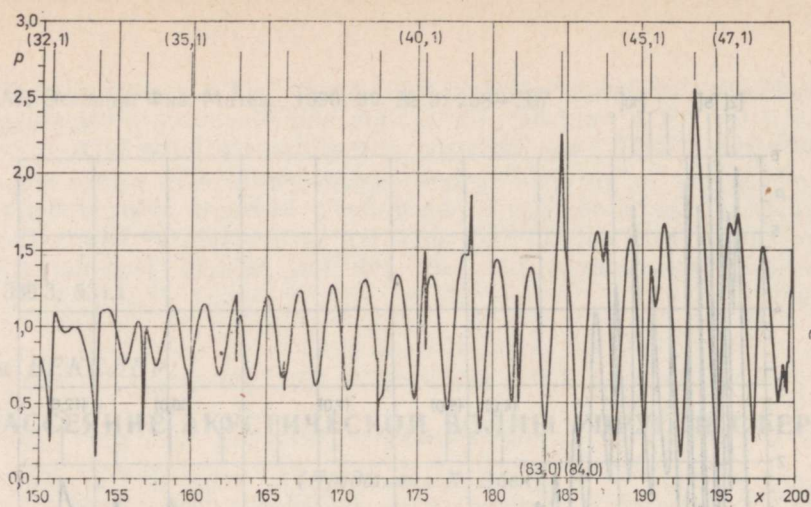
Как известно, нулевая симметричная S_0 и антисимметричная A_0 волны типа Лэмба, а также волна A , в принципе, могут быть возбуждены начиная с $x=0$ (см. дисперсионные кривые фазовых скоростей периферических волн — рис. 2). С ростом частоты, как и в плоском слое, в полый сфере возбуждаются волны Лэмба высших порядков. Из резонансы приводят к сильной изрезанности функции формы.

Исследуем механизм формирования функции формы в представленном диапазоне частот $150 \leq x \leq 200$. В этом диапазоне имеет место суперпозиция периферических волн S_0, A_0, S_1, A_1 и S_2 . Вклад волны A_2 , критическая частота возбуждения которой $x = 198,83$, здесь для простоты будет опущен. Его, конечно, следует учесть при $x \geq 200$.

На рис. 3 приведены кривые резонансных компонентов парциальных мод волн S_0, A_0, S_1, A_1 и S_2 . Резонансные кривые парциальных мод волн S_0 и A_0 снизу обрезаны по уровню $\zeta_n = 0,5$.

Видно, что в этом диапазоне резонансы парциальных мод волны S_1 являются добротными. Резонансная кривая некоторого порядкового номера n пересекает кривые соседних номеров $(n-1)$ и $(n+1)$ на низком уровне. Такие резонансы дают на функции формы отчетливо различимые экстремумы. Общее число N резонансов волны S_1 , попадающих в диапазон $150 \leq x \leq 200$, равно 17 (от $n=32$ до $n=48$). Резонанс (38, 1) имеет малую амплитуду и в выбранном масштабе его не показывать.





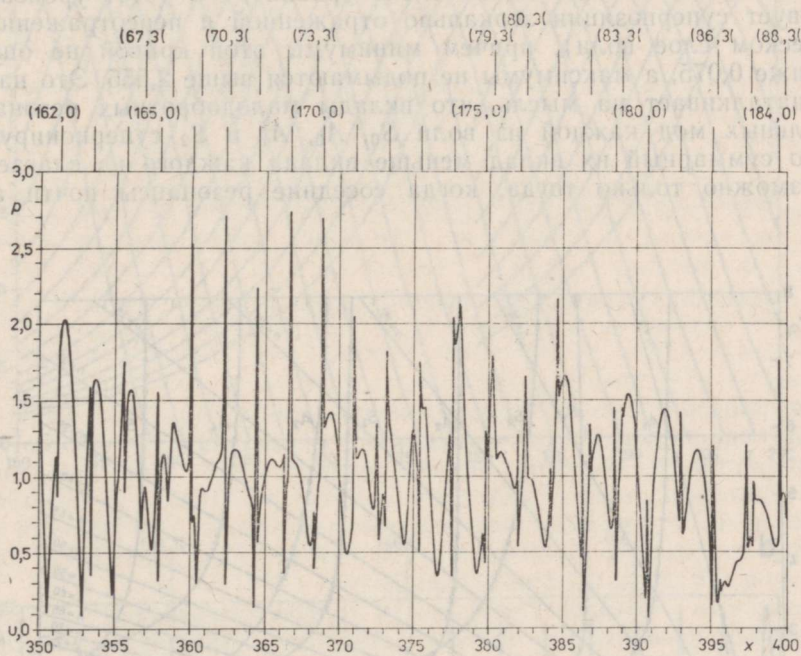
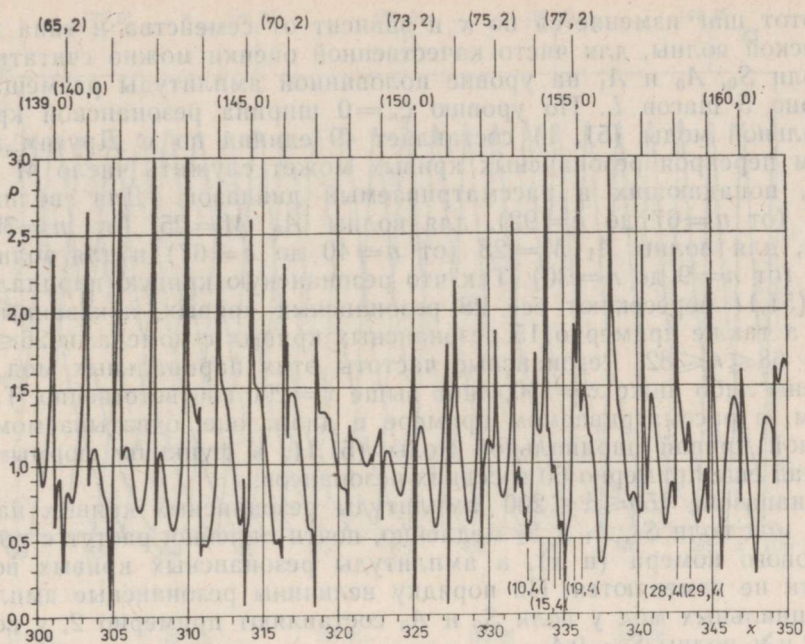


Рис. 1. Функция формы акустического давления, рассеянного полый пустой алюминиевой сферой в воду.

Напротив, в диапазоне $150 \leq x \leq 200$ резонансные кривые парциальных мод волн S_0 , A_0 , A_1 и S_2 существенно перекрывают друг друга. Об этом можно судить по ширине резонансной кривой либо на уровне половинной амплитуды, либо на уровне нулевой амплитуды, которую надо сопоставить с шагом следования L последовательных резонансов.

Хотя этот шаг изменяется по x и зависит от семейства и типа периферической волны, для чисто качественной оценки можно считать, что для волн S_0 , A_0 и A_1 на уровне половинной амплитуды размещается примерно 5 шагов L . По уровню $\xi_n=0$ ширина резонансной кривой парциальной моды (51, 1) составляет 49 единиц по x . Другим показателем перекрытия резонансных кривых может служить число M резонансов, попадающих в рассматриваемый диапазон. Для волны S_0 $M=26$ (от $n=67$ до $n=92$), для волны A_0 $M=25$ (от $n=75$ до $n=99$), для волны A_1 $M=28$ (от $n=40$ до $n=67$) и для волны S_2 $M=22$ (от $n=9$ до $n=30$). Так что резонансную кривую парциальной моды (51,1) пересекают все 28 резонансных кривых, показанных на рис. 3, а также примерно 15 резонансных кривых с номерами $26 \leq n \leq 39$ и $68 \leq n \leq 82$. Резонансные частоты этих парциальных мод расположены либо ниже $x=150$, либо выше $x=200$ соответственно. Таким образом, в рассматриваемом примере в диапазоне, охватываемом резонансной кривой парциальной моды (51,1), в функцию формы вносят вклад еще примерно 60 соседних резонансов.

В диапазоне $150 \leq x \leq 200$ амплитуды резонансных кривых парциальных мод волн S_0 , A_1 и S_2 медленно, почти линейно, растут с ростом порядкового номера (и x), а амплитуды резонансных кривых волны A_0 почти не изменяются. По порядку величин резонансные амплитуды парциальных мод у волн S_0 и A_0 составляют примерно 2, у волн $A_1 \sim 1,2$ и у волн $S_2 \sim 0,4$.

График функции формы в диапазоне $150 \leq x \leq 200$ представляет собой некое «колебание» относительно уровня $p=1$ (этот уровень соответствует суперпозиции зеркально отраженной и преотраженных в сферическом слое волн), причем минимумы этой кривой не опускаются ниже 0,075, а максимумы не поднимаются выше 2,555. Это наблюдение наталкивает на мысль, что вклады малодобротных резонансов парциальных мод каждой из волн S_0 , A_0 , A_1 и S_2 суперпозируются так, что суммарный их вклад меньше вклада каждого из слагаемых. Это возможно только тогда, когда соседние резонансы почти антифазны.

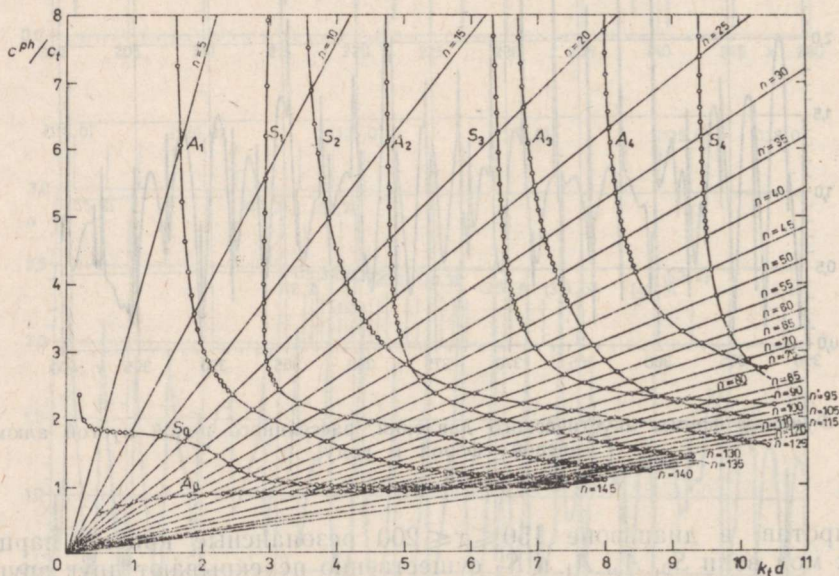
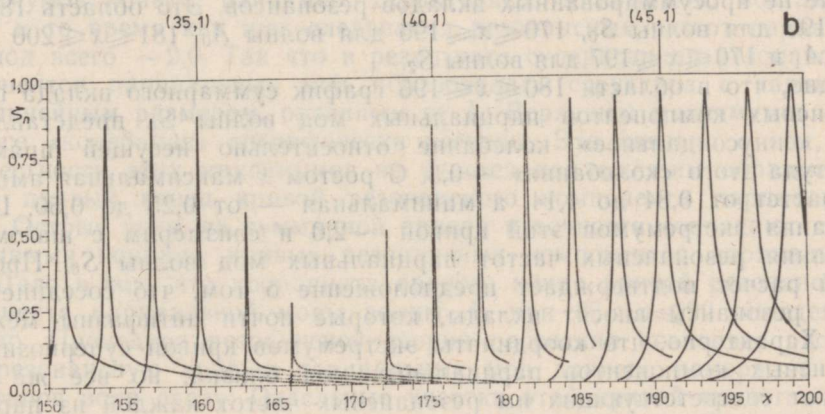
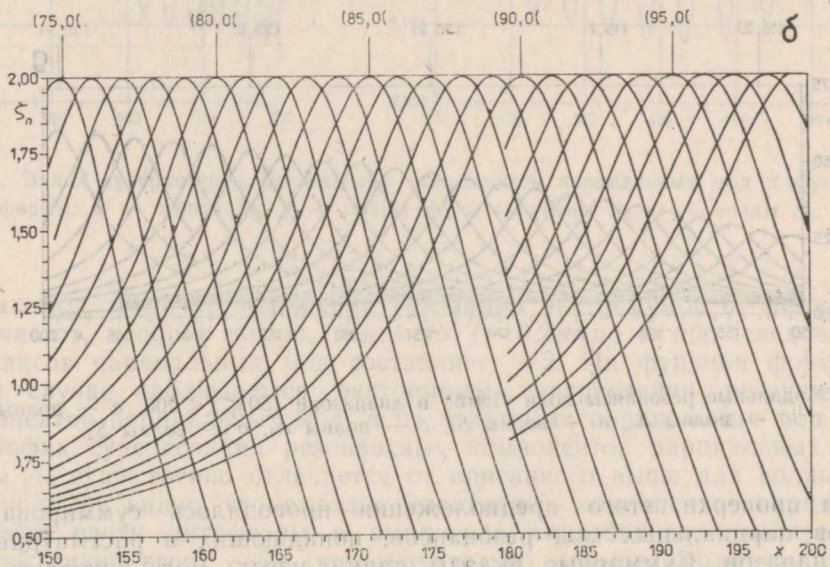
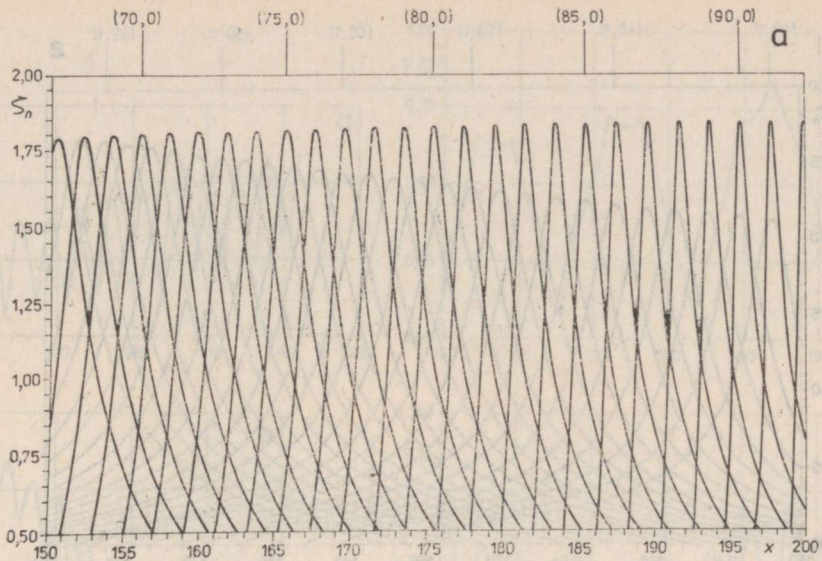


Рис. 2. Дисперсионные кривые фазовых скоростей периферических волн, возбужденных в упругой сфере.



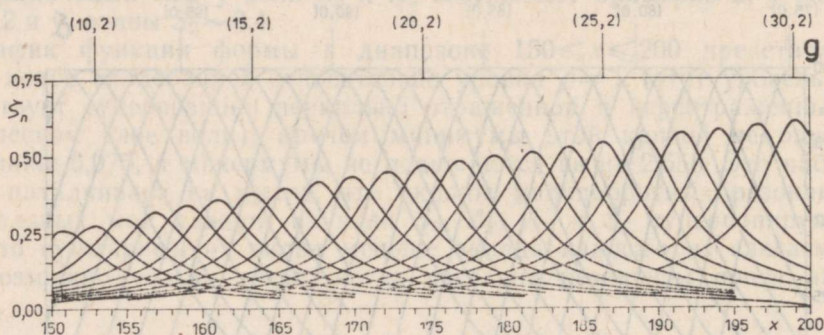
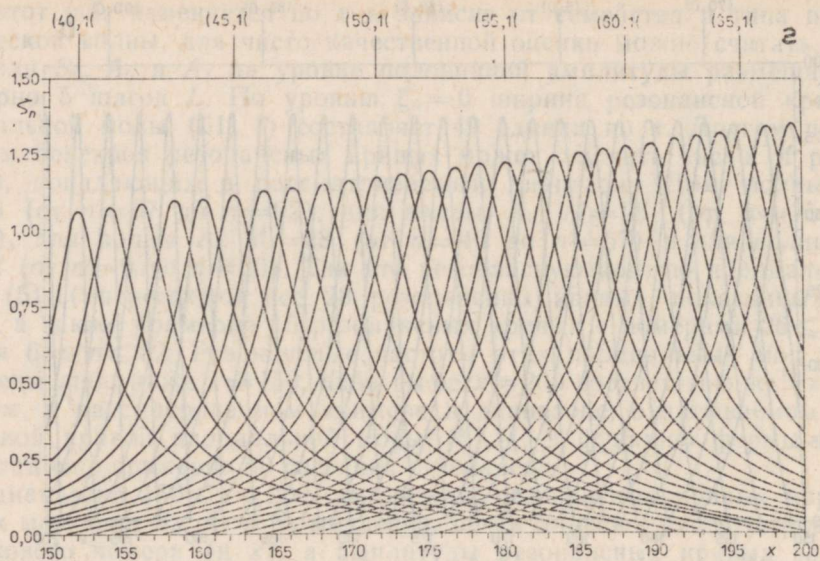


Рис. 3. Модальные резонансы волн Лэмба в диапазоне $150 \leq x \leq 200$: а — волны S_0 , б — волны A_0 , в — волны S_1 , г — волны A_1 , д — волны S_2 .

Для проверки этого предположения проводилось суммирование вкладов парциальных мод резонансов, попадающих в рассматриваемый диапазон. Суммарные вклады парциальных мод показаны на рис. 4. Они даны только для тех областей, в которых не сказывается влияние не просуммированных вкладов резонансов. Это область $180 \leq x \leq 196$ для волны S_0 , $170 \leq x \leq 196$ для волны A_0 , $181 \leq x \leq 200$ для волны A_1 и $170 \leq x \leq 197$ для волны S_2 .

Видно, что в области $180 \leq x \leq 196$ график суммарного вклада всех резонансных компонентов парциальных мод волны S_0 представляет собой «синусоидальное» колебание относительно несущей прямой. Амплитуда этого «колебания» $\sim 0,3$. С ростом x максимальная амплитуда растет от 0,84 до 1,14, а минимальная — от 0,25 до 0,50. Шаг следования экстремумов этой кривой $\sim 2,0$ и соизмерим с шагом L следования резонансных частот парциальных мод волны S_0 . Проведенный расчет подтверждает предположение о том, что соседние по номеру резонансы вносят вклады, которые почти антифазны между собой. Характерно, что координаты экстремумов кривой суперпозиции резонансных компонентов парциальных мод близки, но все же отличны от соответствующих им резонансных частот каждой из парци-

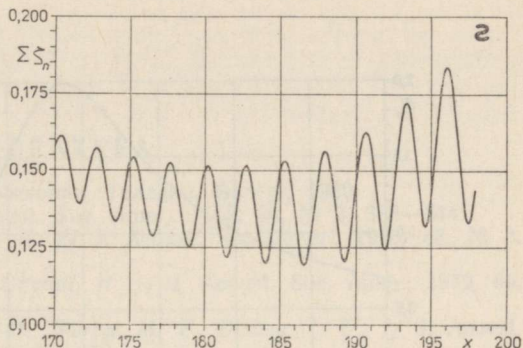
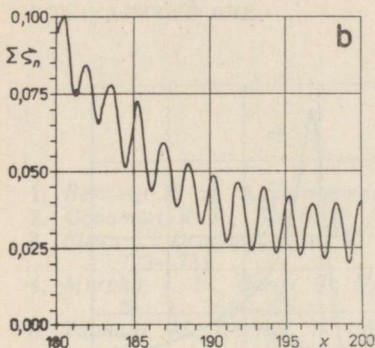
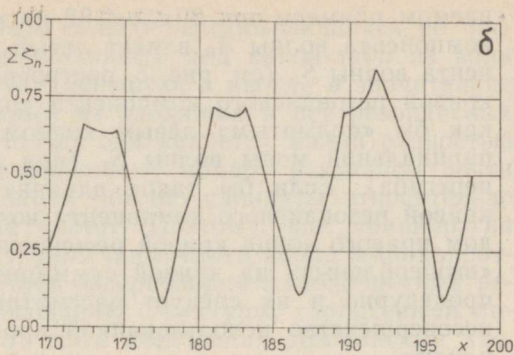
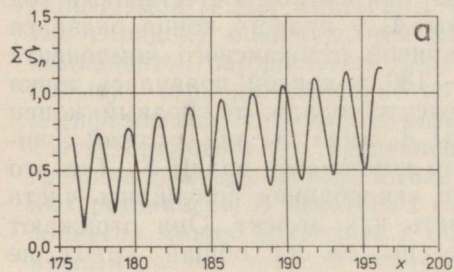


Рис. 4. Вклад суперпозиции резонансных компонентов парциальных мод в функцию формы: а — волны S_0 , б — волны A_0 , в — волны A_1 , г — волны S_2 .

альных мод. Отличие положений указанных экстремумов от резонансных частот, вообще говоря, невелико ($\sim 0,2$), но и шаг следования резонансов парциальных мод составляет ~ 2 . На функции формы в таком случае наблюдаются экстремумы суперпозиции резонансных компонентов парциальных мод, а не отдельных парциальных мод.

График суперпозиции резонансных компонентов парциальных мод волны A_0 существенно отличается от описанного выше для волны S_0 . Хотя и здесь видно, что вклады резонансных компонентов парциальных мод почти антифазны и амплитуда «колебания» относительно средней линии всего $\sim 0,4$, что значительно меньше амплитуды резонансного компонента парциальной моды равной ~ 2 , шаг следования экстремумов кривой, например характерных минимумов, составляет $\sim 9,3$, в то время как шаг следования резонансных частот парциальных мод всего $\sim 2,0$. Так что в результате суперпозиции резонансных компонентов парциальных мод образовалась структура с характерным линейным размером, отличным от L . Вершины максимумов суммарного «колебания» специфически усечены. Это связано с тем, что в окрестности этих максимумов не удается надлежащим образом задать правый конец кривой резонансного компонента парциальной моды. Острые углы на суммарной кривой в точности совпадают с значающими концами кривых резонансных компонентов парциальных мод. Дело в том, что координата правого конца кривой резонансного компонента парциальной моды волны A_0 при $80 \leq n \leq 92$ определена неточно. Процедура резонансной теории рассеяния позволяет рассчитать резонансную кривую парциальных мод данного номера n для всех типов волн сразу. Отдельные участки этой кривой представляют резонансные кривые парциальных мод различных волн. В рассматри-

ваемом примере при $80 \leq n \leq 92$ на правый конец кривой резонансного компонента волны A_0 влияет левый конец кривой резонансного компонента волны S_0 (см. рис. 5, построенный при $n=85$). Естественный ход кривой резонансного компонента волны A_0 у правого конца оказался как бы «подмятым» левым концом кривой резонансного компонента парциальной моды волны S_0 (при $x \sim 180$ у кривой появилась точка перегиба). Если бы такое влияние отсутствовало, то правый конец кривой резонансного компонента волны A_0 имел бы вид, схожий с видом правого конца кривой резонансного компонента волны S_0 . Так что «выщерблены» на кривой суммарного «колебания» получились чисто процедурно и их следует рассматривать как дефект. Они отражают несовершенство использованной процедуры, но на общий вывод не влияют.

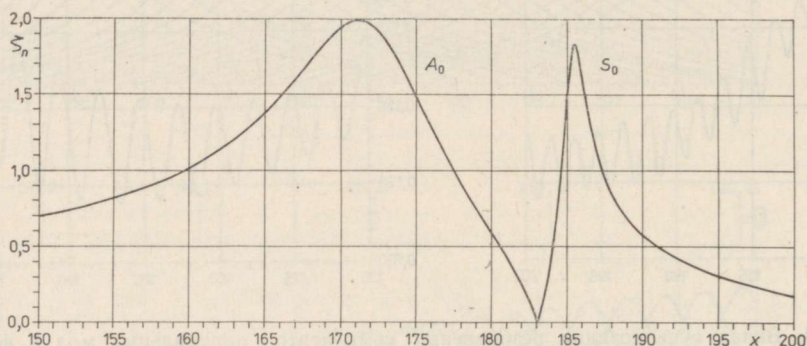


Рис. 5. Резонансная кривая волн A_0 и S_0 при $n=85$.

В области $180 \leq x \leq 196$ поведение графиков суммарного вклада резонансных компонентов парциальных мод волн A_1 и S_2 в существенной мере подобно описанному выше графику, относящемуся к волне S_0 . Амплитуда «колебания» относительно средней «несущей» линии у кривой, относящейся к волне A_1 всего $\sim 0,02$, а к волне S_2 — $\sim 0,05$. Шаг следования экстремумов соизмерим с шагом следования резонансных частот парциальных мод, но положения экстремумов заметно отличаются от положений соответствующих им резонансных частот.

По-видимому, подобным образом ведет себя суперпозиция малодобротных, перекрывающихся по частоте резонансных компонентов парциальных мод волн S_3 , A_3 , S_4 и A_4 . Во всяком случае в рассматриваемом примере не наблюдается эффект систематического роста амплитуды функции формы за счет интерференции следующих друг за другом малодобротных резонансных компонентов парциальных мод какой-либо из периферических волн.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

1. Счет функции формы и резонансных компонентов парциальных мод является необходимым элементом в задаче об отыскании параметров упругого тела по рассеянному им полю акустического давления.

2. Лишь высокодобротные резонансные компоненты парциальных мод могут проявиться в виде характерных экстремумов функции формы. В рассматриваемом примере такими являются резонансы волн A (при $n \sim 2-10$), S_0 ($n \sim 4-20$), S_1 ($n \sim 30-50$), A_1 ($n \sim 1-25$), A_2 ($n \sim 2-60$), S_3 ($n \sim 5-35$).

3. Суперпозиция малодобротных, сильно перекрывающихся по частоте, резонансных компонентов парциальных мод какой-либо из волн типа Лэмба может иметь амплитуду меньшую, а иногда и значительно (на порядок) меньшую, чем каждый из входящих в нее резонансных компонентов парциальных мод. Подчас она является малой разностью больших величин. Соседние по порядковому номеру резонансы почти антифазны. Экстремумы суперпозиции обычно сдвинуты относительно соответствующих им резонансных частот. Поэтому, как правило, на графике функции формы бывает трудно проследить вклад малодобротных резонансов. В некоторых случаях суперпозиция малодобротных резонансов может приводить к образованию структуры, характерный линейный размер которой отличен от шага следования резонансных частот. Эта структура может проявиться и в функции формы, придав ей причудливый вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер Н. Д. Акустическая спектроскопия. Таллинн, Валгус, 1989.
2. Goodman, R. R., Stern, R. // J. Acoust. Soc. Amer., 1962, 34, № 3, 338—344.
3. Flax, L., Dragonette, L. R., Überall, H. // J. Acoust. Soc. Amer., 1978, 63, № 3, 723—731.
4. Murphy, J. D., Gerge, J., Nagl, A., Überall, H. // J. Acoust. Soc. Amer., 1979, 65, № 2, 368—373.
5. Talmant, M., Überall, H., Miller, R. D., Werby, M. F., Dickey, J. W. // J. Acoust. Soc. Amer., 1989, 86, № 1, 278—289.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонии

Поступила в редакцию
15/1 1990

Naum VEKSLER

AKUSTILISE LAINE HAJUMINE ELASTSELT SFÄÄRILT

On vaadeldud tasapinnalise surveaine elastselt õõnessfäärilt hajumise statsionaarset ülesannet. Arvutused on tehtud vettekastetud alumiiniumsfääri põhjal, kus sfääri paksus on $h=1-b/a=1/10$. On leitud funktsiooni kaju (joon. 1), modaalsed resonantsid (joon. 3) ja dispersioonikõverad (joon. 2). Iga perifeerse laine puhul on näidatud, et halvakuvaliteediliste sagedust tugevalt ületavate partsiaalmodide resonantskomponentide superpositsioon (joon. 4) annab funktsiooni kujule väiksema panuse kui üksik partsiaalmod. Seepärast ei ole funktsiooni kujul üldjuhul näha ekstreemumeid, mis vastavad halvakuvaliteedilistele resonantsidele.

Naum VEKSLER

SCATTERING OF ACOUSTIC WAVE BY ELASTIC SPHERE

A steady-state problem of plane acoustic pressure wave scattering by a hollow empty elastic sphere has been considered. The computations have been carried out in case of aluminium sphere immersed in water. The relative thickness of the shell $h=1-b/a=1/10$. The form function (Fig. 1), modal resonances (Fig. 3) and dispersion curves of phase velocities (Fig. 2) have been calculated. For each of the peripheral waves it has been shown that the superposition of successive resonance components of partial modes with low Q -factor (Fig. 4) inserts in the form function a contribution which is less than the relevant contribution of a single partial mode. Therefore, as a rule, on the form function curve the extrema corresponding to the resonances with low Q -factor cannot be clearly observed.