Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 3, 230—235
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.3.06

УДК 621.391

Ильмар АРРО

АЛГОРИТМЫ СОКРАЩЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

(Представил Х. Абен)

1. Введение

В данной статье излагается единая теория алгоритмов сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ) в базисе тригонометрических функций, пригодных при расчетах преобразования произвольной размерности D и периодов $N=2^n$, где n — любое целое положительное число, и дающих результат после выполнения наименьшего общего количества арифметических операций по сравнению со всеми известными вычислительными схемами.

2. Алгоритм приведения многомерного ДПФ произвольной размерности к нечетным трансформантным преобразованиям

ДПФ массива данных размерностью D, объемом N^D, $N=2^n$, с точностью до нормировочного множителя определяется выражением

$$X(K_1, K_2, \ldots, K_D)=\sum_{I_1=0}^{N-1}\sum_{I_2=0}^{N-1}\ldots\sum_{I_0=0}^{N-1} Y(I_1, I_2, \ldots, I_D)\times$$
$$\times W_N^{I_1K_1+I_2K_2+\cdots-I_DK_D}, \tag{1}$$

где $W_N=\exp(-2\pi\sqrt{-1}/N)$.

Эффективные алгоритмы для вычисления сумм вида (1) получаются при приведении многомерного преобразования к расчету одномерных спектров по неперекрывающимся индексам. Наиболее известными методами приведения являются полиномиальные преобразования [1] и разложение тензора на компоненты [2, 3].

Поскольку тензорное представление многомерного спектра без особого труда может быть распространено на произвольную размерность D, то, воспользовавшись этим, представим формулу (1) в следующем виде:

$$X(K_1, K_2, \ldots, K_D)=\sum_{E=0}^{N-1} Z(K_1, K_2, \ldots, K_D; E)\, W_N^E, \tag{2}$$

где
$$Z(K_1, K_2, \ldots, K_D; E)=\sum_{V_{\forall K,E}} Y(I_1, I_2, \ldots, I_D), \tag{3}$$

$$V_{\forall K,E}=\{(I_1, I_2, \ldots, I_D);\ I_i=\overline{0, (N-1)}\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{D} I_iK_i=E\,(\mathrm{mod}\,N)\}.$$

Множества $V_{\forall K,E}$ однозначно определяют компоненты $Z(K_1, K_2, \ldots, K_D; E)$ тензора $D+1$ ранга, на котором вычисляется спектр $X(K_1, K_2, \ldots, K_D)$.

Представление взаимооднозначно и характеризуется следующим свойством. Для произвольного целого H справедливо равенство

$$X(\bar{H}K_1, \bar{H}K_2, \ldots, \bar{H}K_D)=\sum_{E=0}^{N-1} Z(K_1, K_2, \ldots, K_D; E)\, W_N^{HE}, \tag{4}$$

$$\bar{H}K_i=HK_i\ (\mathrm{mod}\,N)\ \forall i.$$

Следовательно, путем фиксирования $\{K_1, K_2, \ldots, K_D\}$ по соответствующим компонентам тензора $Z(K_1, K_2, \ldots, K_D; 0), \ldots, Z(K_1, K_2, \ldots, K_0; N-1)$ можно вычислить сразу спектр на множестве точек $\{\widetilde{HK_1}, \widetilde{HK_2}, \ldots, \widetilde{HK_D}\}$. Полное спектральное перекрытие обеспечивается выбором исходных значений $\{K_1, K_2, \ldots, K_D\}$ при построении $Z(K_1, K_2, \ldots, K_D; E)$.

Наименьшее число выполняемых арифметических операций для реализации алгоритма (2) получается, когда любая точка спектра $X(K_1, K_2, \ldots, K_D)$ вычисляется лишь один раз. Это условие выполняется, если исходные значения $\{K_1, K_2, \ldots, K_D\}$ выбираются из множества

$$\{1, K_2, \ldots, K_D;\ K_2, \ldots, K_D = \overline{0,\ (N-1)}\} \cup$$
$$\cup \{2K_1, 1, K_3, \ldots, K_D;\ K_1 = \overline{0,\ (N/2-1)},\ K_3, \ldots, K_D = \overline{0,\ (N-1)}\} \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \{2K_1, \ldots, 2K_{D-1}, 1;\ K_1, \ldots, K_{D-1} = \overline{0,\ (N/2-1)}\} \tag{5}$$

в случае хотя бы одного нечетного адреса. Когда же $K_i \forall i$ четные, то следует уменьшить период преобразования (2) в два раза путем суммирования, а далее выполнять выбор исходных $\{K_1, K_2, \ldots, K_D\}$ по принципу (5).

Таким образом, вместо полного преобразования по формуле (1) вычисления сводятся к преобразованиям типа

$$X((\widetilde{2H+1}),\ (\widetilde{2H+1})K_2, \ldots, (2H+1)K_D) =$$
$$= \sum_{E=0}^{N-1} Z(1, K_2, \ldots, K_D;\ E) \times W_N^{(2H+1)E}, \tag{6}$$

т. е. к нечетным трансформантным преобразованиям [4–36].

На основе [4–36] составлена таблица, в которой указано требуемое для реализации алгоритма количество арифметических операций при $N=1024$; входной массив — вещественный.

Число сложений	Число умножений	Тип преобразования
5 881	1 793	Синусное пр., $D=1$
5 901	1 793	Косинусное пр., $D=1$
12 804	3 586	ДПФ, $D=1$
23 942 492	4 019 544	ДПФ, $D=2$
32 677 631 988	4 218 271 456	ДПФ, $D=3$

3. Алгоритм расширения периода ДПФ

При использовании спецпроцессоров ДПФ нередко требуется выполнение преобразований для периодов, неукладывающихся в спецпроцессор. Покажем, что существенного сокращения времени обработки можно добиться и в таком случае, особенно, когда спецпроцессор, кроме ДПФ и ОДПФ может выполнить векторные операции комплексного умножения, суммирования и вычитания вещественных чисел. Подвергаем анализу лишь двукратное расширение периода, так как на базе этого можно выполнить расширение 2 в степени произвольное положительное число раз.

Итак, требуется вычислить

$$XC(K) = \sum_{I=0}^{2N-1} Y(I) \cos\left(\frac{\pi}{N} IK\right), \tag{7}$$

$$XS(K) = \sum_{I=0}^{2N-1} Y(I) \sin\left(\frac{\pi}{N} IK\right). \tag{8}$$

На базе N — точечного преобразования.

Представим $XC(K)$ и $XS(K)$ в следующем виде:

$$XC(K) = XC^0_N(K) + \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) - \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K), \quad (9)$$

$$K = \overline{0, N};$$

$$XS(K) = XS^0_N(K) + \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) + \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K), \quad (10)$$

$$K = \overline{1, (N-1)},$$

где
$$XC^0_N(K) = \sum_{I=0}^{N-1} Y(2I) \cos\left(\frac{2\pi}{N}IK\right),$$

$$XS^0_N(K) = \sum_{I=1}^{N-1} Y(2I) \sin\left(\frac{2\pi}{N}IK\right),$$

$$XC^1_N(K) = \sum_{I=0}^{N-1} Y(2I+1) \cos\left(\frac{2\pi}{N}IK\right),$$

$$XS^1_N(K) = \sum_{I=1}^{N-1} Y(2I+1) \sin\left(\frac{2\pi}{N}IK\right),$$

$$K = \overline{0, N/2}, \text{ причем}$$

$$XC^{0,1}_N(N-K) = XC^{0,1}_N(K),$$

$$XS^{0,1}_N(N-K) = -XS^{0,1}_N(K).$$

Теперь можно выписать конкретные соотношения для расчета спектра во всех подинтервалах.

$$XC(K) = XC^0_N(K) + \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) - \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K), \quad (11)$$

$$XC(N-K) = XC^0_N(K) - \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) + \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K), \quad (12)$$

$$XS(K) = XS^0_N(K) + \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) + \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K), \quad (13)$$

$$XS(N-K) = -XS^0_N(K) + \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) + \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K), \quad (14)$$

$$K = \overline{0, N/2}.$$

Естественно, $XS^{0,1}_N(0) = XS^{0,1}_N(N/2) = 0$.

Итак, на спецпроцессоре вычисления выполняются в следующей последовательности.

1. По $Y(2I)$ определяются $XC^0_N(K)$, $XS^0_N(K)$.
2. По $Y(2I+1)$ определяются $XC^1_N(K)$, $XS^1_N(K)$.
3. Выполняется операция умножения $XC^1_N(K)$, $XS^1_N(K)$ на поворачивающие коэффициенты, т. е. вычисляются

$$A(K) = \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) - \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K),$$

$$B(K) = \sin\left(\frac{\pi}{N}K\right) XC^1_N(K) + \cos\left(\frac{\pi}{N}K\right) XS^1_N(K).$$

4. Определяется спектр по подинтервалам

$$XC(K)=XC^0_N(K)+A(K),$$

$$XC(N-K)=XC^0_N(K)-A(K),$$

$$XS(K)=XS^0_N(K)+B(K),$$

$$XS(N-K)=-XS^0_N(K)+B(K).$$

На всех этапах $K=0, N/2$.

Далее, на основе формул (11)—(14) определяем процедуру обратного ДПФ в случае периода, расширенного в два раза.

Из (11) и (12) определяем $2XC^0_N(K)=XC(K)+XC(N-K)$, а из (13) и (14) — $2XS^0_N(K)=XS(K)-XS(N-K)\ \forall K$.

Выполняя по $XC^0_N(K)$, $XC^0_N(K)$ обратное ДПФ на спецпроцессоре, получаем $Y(2l)$.

Находим следующие разности

$$\delta(K)=XC(K)-XC(N-K)=$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{N}K\right)XC^1_N(K)-2\sin\left(\frac{\pi}{N}K\right)XS^1_N(K)$$

и суммы

$$\alpha(K)=XS(K)+XS(N-K)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{N}K\right)XC^1_N(K)+2\cos\left(\frac{\pi}{N}K\right)XC^1_N(K)\ \forall K.$$

Умножением $\delta(K)$, $\alpha(K)$ на поворачивающие коэффициенты, находим

$$2XC^1_N(K)=\delta(K)\cos\left(\frac{\pi}{N}K\right)+\alpha(K)\sin\left(\frac{\pi}{N}K\right),$$

$$2XS^1_N(K)=-\delta(K)\sin\left(\frac{\pi}{N}K\right)+\alpha(K)\cos\left(\frac{\pi}{N}K\right).$$

Выполняя по $XC^1_N(K)$ и $XS^1_N(K)$ еще раз обратное ДПФ с периодом N, получаем оставшуюся часть исходного массива, т. .е $Y(2l+1)$.

Приведенные здесь формулы расширения периода ДПФ в 2 раза могут быть заложены в основу для расширения периода в 4,8 и т. д. раз.

4. Заключение

Рассмотренные алгоритмы позволяют наилучшим образом адаптироваться с особенностями исходного массива данных: четная, нечетная последовательность; один или множество вещественных векторов, одномерный или многомерный массив. Все преобразования могут быть выполнены замещением памяти, факторизованы и реализованы аппаратно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нусебаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М., Радио и связь, 1985.
2. *Григориан А. М.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1984, № 3, 52—57.
3. *Arro, I., Smolyansky, L., Trump, T.* // Proc. of 5-th international school «Automation and scientific instrumentation — 88». Varna, Bulgarian Academy of Sciences, 1988, 257—260.
4. Разработка алгоритмов, программ и изготовление процессора обработки векторного сигнала. Специальное конструкторское бюро вычислительной техники Института кибернетики АН ЭССР, № ГР01860087668, инв. № 02870072178. Таллинн, 1987.
5. *Арро И. О.* // Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов. Тез. докл. Т. 1. Рига, Ин-т электр. и вычисл. техники АН Лат. ССР, 1986, 115—118.
6. *Арро И. О.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1987, № 1, 5—10.
7. *Трумп Т.* // Вопросы оптимизации вычислений. Тез. докл. Киев, АН УССР, 1987, 214.
8. *Трумп Т.* // Применение микропроцессоров в народном хозяйстве. Тез. докл. Таллинн, НТО РЭС им. А. С. Попова, 1988, 8—10.
9. *Трумп Т.* // Применение микропроцессоров в народном хозяйстве. Тез. докл. Таллинн, НТО РЭС им. А. С. Попова, 1988, 10—12.
10. Промежуточный отчет «Байкал 4». Специальное конструкторское бюро вычислительной техники Института кибернетики АН ЭССР, № ГР01860087668, инв. № 02880040798. Таллинн, 1987.
11. *Арро И., Трумп Т.* // Методы и средства аналоговой и цифровой обработки информации. Сб. научных трудов. Таллинн, АН ЭССР, 1988, 110—114.
12. *Трумп Т.* // Методы и средства аналоговой и цифровой обработки информации. Сб. научных трудов. Таллинн, АН ЭССР, 1988, 115—126.
13. *Арро И., Трумп Т.* // Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1988, вып. 676, 45—53.
14. *Трумп Т.* // Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1988, вып. 676, 54—63.
15. *Трумп Т.* // Специализированные процессоры обработки информации. Архитектура, алгоритмы, программы. Сб. научных тр. Таллинн, АН Эстонии, 1989, 80—91.
16. *Трумп Т.* // Специализированные процессоры обработки информации. Архитектура, алгоритмы, программы. Сб. научных тр. Таллинн, АН Эстонии, 1989, 92—101.
17. *Трумп Т.* // Специализированные процессоры обработки информации. Архитектура, алгоритмы, программы. Сб. научных тр. Таллинн, АН Эстонии, 1989, 102—111.
18. *Трумп Т.* // Технические и программные средства измерительно-вычислительных комплексов. Сб. научных тр. Таллинн, АН Эстонии, 1989, 84—94.
19. *Арро И. О., Смолянский Л. Э.* // Сборник научных трудов СКБ ВТ ИК АН ЭССР «Методы и средства измерения, преобразования и обработки информации». Таллинн, АН ЭССР, 1987, 19—38.
20. *Смолянский Л. Э.* // Всесоюзный семинар «Вопросы оптимизации вычислений». Тез. докл. (6—8 окт. 1987 г., г. Алушта). Киев, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1987, 197—198.
21. *Арро И. О., Смолянский Л. Э.* // Методы и средства аналоговой и цифровой обработки информации. Таллинн, АН ЭССР, 1988, 91—97.
22. *Смолянский Л. Э.* // Методы и средства аналоговой и цифровой обработки информации. Таллинн, АН ЭССР, 1988, 98—109.
23. *Смолянский Л. Э.* // Обработка сигналов на базе микропроцессоров и микро-ЭВМ. Тез. докл. третьей секции республиканской научно-технической конференции «Применение микропроцессоров в народном хозяйстве». Таллинн, 1988, 6—8.
24. *Arro, I., Smolyansky, L.* // Conference Proceedings «Microsystem '89», Karlovy Vary (Carlsbad), 1989, 236—238.
25. *Смолянский Л. Э.* // Специализированные процессоры обработки информации. Архитектура, алгоритмы, программы. Таллинн, АН ЭССР, 1989, 70—79.
26. *Арро И. О., Герм Э. И., Смолянский Л. Э.* // Авт. свид. СССР № 1425708. БИ № 35, 23. 09. 88.
27. *Арро И. О., Герм Э. И., Смолянский Л. Э.* // Заявка на А. с. № 4430980/24. Положит. решение от 28. 03. 89 г.
28. *Арро И. О., Смолянский Л. Э., Трумп Т. И.* // Заявка на А. с. № 4492759/24—24 (144838). Положит. решение от 15. 05. 89 г.
29. *Арро И.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1987, **36**, № 1, 21—29.
30. *Arro, I.* Microsystem '87. Brno, 1987, 306—310.
31. *Арро И.* // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., 1987, **36**, № 2, 129—134.
32. *Арро И.* // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., 1987, **36**, № 3, 340—343.
33. *Арро И.* // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., 1988, **37**, № 2, 238—240.
34. *Арро И. О.* Методы и средства измерения, преобразования и обработки информации. Таллинн, АН ЭССР, 1987, 8—18.

35. *Арро И. О.* // Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1988, вып. 676, 35—44.
36. *Arro, I.* // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Proceedings. Finland, Helsinki, 1988, 2, 1903—1906.

Специальное конструкторское бюро вычислительной техники Института кибернетики Академии наук Эстонии

Поступила в редакцию 20/II 1990

Ilmar ARRO

DISKREETSE FOURIER' TEISENDUSE LÜHENDATUD ALGORITM

On vaadeldud diskreetse Fourier' teisenduse algoritme, mis tagavad tulemuse kõige väiksema tehete üldarvu puhul. Seejuures teisenduse mõõt võib olla suvaline, periood aga peab olema võrdne kahe naturaalse astmega.

Samas on toodud ka algoritm teisenduse perioodi laiendamiseks vektorprotsessori abil.

Ilmar ARRO

ALGORITHMS OF SHORT DISCRETE FOURIER TRANSFORM

The algorithms of short discrete Fourier transform which give results with a minimum total amount of arithmetical operations are considered. The dimension of the transform is arbitrary, but the period would be a natural power of two.

An algorithm for expanding the transform period using a vector processor is described.