Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 3, 213—222
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.3.04

УДК 519.3 : 51 : 62—50

Игорь КЕЙС

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

(Представил Ю. Яаксоо)

Задачам стабилизации и оптимизации механических систем Гамильтона посвящено много работ [1–10]. В них рассматривается, в основном, асимптотическая стабилизация лишь устойчивых движений, проводимая либо способом обращения задачи, вводящим ограничения оптимизации на класс асимптотических регуляторов, либо на основе решения нелинейного уравнения Беллмана, представляющего известные трудности [1, 3–5, 8].

В целях расширения классов решения задач асимптотической и экспоненциальной стабилизации линейными по управлению u силами для нелинейных систем Гамильтона более общего вида, чем [1–10], в работе введены новые градиентные переменные, которые квазилинеаризуют [14] исходные системы.

На основе теории устойчивости движения [2–5, 11–15] и модификаций принципа инвариантности [16] здесь предложены новые критерии асимптотической и экспоненциальной стабилизаций целой исходной системы. Для рассмотренных ниже задач они определяют соответствующие классы стабилизаторов условиями теорем из разделов 1 и 2, неравенствами теоремы вида (2.18), (2.19); (2.18), (2.21) [2] и соотношениями (2.24), (2.25).

Результаты используются в задаче оптимальной стабилизации системы вида Атанса—Летова [6, 8].

1. Постановка задачи. Известно, что уравнения отклонений координат q и импульсов p движений $x_0(t)$ для широкого класса систем управления описываются нелинейной стационарной системой Гамильтона [3–5, 9, 10] общего вида

$$\dot{q}=\mathcal{H}_p,\quad \dot{p}=-\mathcal{H}_q+Bu;\quad B=[b_{j\sigma}],\quad b_{i\sigma}=b_{i\sigma}(x)\subset C[E^{2n}], \tag{1.1}$$
$$x=(q^{\mathrm{T}},p^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\quad q=(q_i)^{\mathrm{T}},\quad p=(p_j)^{\mathrm{T}},\quad u=(u_\sigma)^{\mathrm{T}};\quad 1\leqslant i,\quad j\leqslant n,$$
$$1\leqslant\sigma\leqslant r\leqslant n,$$

где движение $x\equiv 0$ (1.1) ($u\equiv 0$) регулируется линейными по вектору управления u силами с матрицей усиления $B=B(x)$ полного ранга $\varrho_B\equiv\operatorname{rank}B=r=\dim u\leqslant n$ на E^{2n}, а $\mathcal{H}=\mathcal{H}(x)$ — 0 дважды непрерывно дифференцируемая нелинейная функция x, необязательно квадратичная от p и удовлетворяющая условиям существования покоя $x\equiv 0$ ($u\equiv 0$)

$$\mathcal{H}(0)=0;\quad g(0)=0;\quad g(x)\equiv\mathcal{H}_x\equiv(\partial\mathcal{H}/\partial x_k)^{\mathrm{T}},\quad 1\leqslant k\leqslant 2n \tag{1.2}$$

при $\mathcal{H}=\mathcal{H}(x)\subset C_2[E^{2n}]$, $\mathcal{H}_p\equiv(\partial\mathcal{H}/\partial q_i)^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{H}_q\equiv(\partial\mathcal{H}/\partial p_j)^{\mathrm{T}}$.

Система (1.1), (1.2) включает, в частности, голономные механические системы, рассматриваемые в [3–5, 9, 10], когда

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}^2(x)=1/2p^{\mathrm{T}}Hp+kp^{\mathrm{T}}+\Pi(q),\quad H=[h_{ij}(q)],\quad k=(k_j)^{\mathrm{T}}, \tag{1.3}$$
$$H=H(q)=H^{\mathrm{T}}(q)>0;\quad h_{ij},\quad k_j,\quad \Pi\subset C_2(E^n),\quad k=k(q),$$

а при $\mathcal{H}_2 \equiv h^2(p)$ — норм-инвариантные системы вида Атанса—Летова [6, 8]. С учетом (1.2), (1.3) в задачах стабилизации состояния равновесия $x \equiv 0$ $(u \equiv 0)$ системы (1.1) примем для нее ограничения

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad \|g(x)\| \to \infty \Leftrightarrow \|x\| \to \infty, \tag{1.4}$$
$$\exists\, l_0 = \text{const} > 0, \quad l_1 = \text{const} > 0: \ \|x\| \leqslant l_1 \|g\|^{l_0},$$
$$|H| \neq 0, \quad x \in E^{2n}; \quad H^{\mathrm{T}} = H = \left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x_k\, \partial x_m}\right], \quad 1 \leqslant k, \quad m \leqslant 2n,$$
$$H_{22} \equiv \left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x_\nu\, \partial x_\mu}\right] > 0, \quad x \in E^{2n}, \quad n+1 \leqslant \nu, \quad \mu \leqslant 2n$$

типа [3, 5, 9, 10, 16], когда система (1.1), $u \equiv 0$ имеет одну точку покоя $x \equiv 0$, норма градиентных переменных $z_k \equiv g_k(x)$ — бесконечно большая [11, 12] функция, удовлетворяет обратному условию Липшица, матрица H — неособая с постоянной на E^{2n} сигнатурой $2(n-l)$, l — число отрицательных собственных чисел H, $0 \leqslant l \leqslant n$. При $g_\alpha(x) \equiv 0$, $1 < \alpha \leqslant n$ оптимальная стабилизация (1.1) рассмотрена в [4, 5, 7]. Для системы (1.1), (1.2), $u \equiv 0$ известны [9] следующие результаты. Если $f_1(x)$, $f_2(x)$ ее инварианты $\dot{f}_1 \equiv 0$, $\dot{f}_2 \equiv 0$, то скобка Пуассона

$$(f_1, f_2)_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \partial(f_1, f_2)/\partial(q_i, p_j) \equiv f_3(x), \quad \dot{f}_3 \equiv 0 \tag{1.5}$$

также инвариант. В частности, $\dot{\mathcal{H}} \equiv 0$. Система имеет относительный линейный интегральный инвариант I_1 Пуанкаре—Картана и абсолютный I_{2n} инвариант порядка $2n$ Лиувилля

$$I_1 = \oint \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \mathcal{H} \delta t\right), \quad dI_1/\mathrm{d}t \equiv 0, \tag{1.6}$$

$$I_{2n} = \int\limits_{\mathfrak{D}} f(x)\, dq_1\, dq_2 \ldots dp_{n-1}\, dp_n, \quad dI_{2n}/\mathrm{d}t \equiv 0, \tag{1.7}$$

где $f(x)$ — любой $(f \equiv 1)$ инвариант (1.1), $u \equiv 0$. Инвариантность (1.6) на ее решении

$$x = s(t, \xi), \quad \xi \equiv s(0, \xi), \quad \xi \equiv (\alpha_i, \beta_j)^{\mathrm{T}} = \text{const} \tag{1.8}$$

достаточна для формы Гамильтона (1.1), $u \equiv 0$ системы $\dot{x} = \mathcal{F}(x)$, определяющей преобразование $\xi \longleftrightarrow x$ (1.8).

Для каноничности [9] преобразования (1.8) необходима и достаточна инвариантность скобок Пуассона

$$(q_i, q_j)_{\alpha,\beta} \underset{t}{\equiv} (p_i, p_j)_{\alpha,\beta} \underset{t}{\equiv} 0, \qquad (q_i, p_j)_{\alpha,\beta} \underset{t}{\equiv} \delta_{ij}, \tag{1.9}$$

т. е. симплектичность матрицы S преобразования

$$S = [s_{km}], \quad s_{km} \equiv \partial s_k/\partial \xi_m, \quad , \ S\,\mathbf{1}\,S^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}\,; \quad 1 \leqslant k \leqslant m \leqslant 2n, \tag{1.10}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\mathbf{1}$ — кососимметричная $(2n \times 2n)$-матрица со спектром $\lambda(\mathbf{1}) = i(-1, \ldots -1_n;\ 1, \ldots 1_n)$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}^{-1} = -\mathbf{1}, \quad |\mathbf{1}| \equiv \det \mathbf{1} = 1. \tag{1.11}$$

Для (1.1), (1.2), (1.4) поставим задачи:

задачу I — поиска класса стационарных регуляторов $u_1 = u_1(x)$, дающих асимптотическую стабилизацию $x \equiv 0$ в целом $x[t] \to 0$, $t \to +\infty$; $x[t] = x(t, x_0)$, $\forall x_0 \equiv x[t_0] \in E^{2n}$, задачу II — определения класса стационарных регуляторов $u_2 = u_2(x)$ глобальной экспоненциальной стабилизации

$$\|x[t]\| \leqslant \beta \|x_0\| \exp[\alpha(t_0 - t)], \quad t_0 \leqslant t < +\infty, \tag{1.12}$$
$$x_0 \equiv x[t_0], \quad \forall x_0 \in E^{2n}, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0, \quad \beta = \mathrm{const} > 0,$$

где α — заданная или искомая степень устойчивости [11–13, 17].

2. Асимптотические и экспоненциальные регуляторы задач I, II. Введем вектор z новых градиентных переменных L-преобразованием Донкина-Лежандра $(x, \mathcal{H}) \Leftrightarrow (z, \mathcal{G})$ вида

$$z \equiv \mathcal{H}_x \equiv g(x), \qquad \mathcal{G}(z) \equiv z^{\mathrm{T}} x(z) - \mathcal{H}[x(z)], \qquad x \equiv \mathcal{G}_z \equiv h(z), \tag{2.1}$$
$$\mathcal{G}(0) = 0, \quad \mathcal{G}(z) \subset C_2(E^{2n}); \quad \Gamma^{\mathrm{T}} \equiv \Gamma \equiv [\partial^2 \mathcal{G}/\partial z_k\, \partial z_m] = H^{-1},$$
$$h(z) \subset C_1(E^{2n}); \quad \mathrm{H}(z) \equiv H[x(z)]; \quad 1 \leqslant k, \quad m \leqslant 2n,$$

где используются условия и обозначения (1.1), (1.2), (1.4), $x = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow z = 0$, гомеоморфизм $x \leftrightarrow z$ C_1 — гладкий. Ввиду (1.4), (2.1) образ $L(Q) \subset E^{2n}_z$ любого компакта $Q \subset E^{2n}_x$ будет компактом и обратно. $F^{2n}_z \equiv L(E^{2n}_x)$ — неограниченное множество значений $z = g(E^{2n}_x)$ отождествим для простоты с E^{2n}_z — областью изменения z. Если $\mathcal{H}(x)$ — строго выпуклая λ-однородная функция x, то $\mathcal{G}(z)$ — строго выпуклая, μ-однородная функция z, $\mathcal{H}(\varepsilon x) = \varepsilon^{\lambda} \mathcal{H}(x)$, $\forall \varepsilon \subset E^1$, $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\lambda > 1$, $\lambda^{-1} + \mu^{-1} = 1$. Вообще образ $L(C)$ выпуклого $C \subset E_x^{2n}$ не будет выпуклым множеством в E^{2n}_z.

В неканонических [9] z-переменных (2.1) имеем эквивалентную исходной факторизованную [17] и квазилинейную [18] систему стабилизации с единственной при $u \equiv 0$ нулевой точкой покоя

$$\dot{z} = G(z) z + P(z) u; \quad G(z) \equiv \mathrm{H}(z)\, \mathbf{1}, \quad |G|_{E^{2n}_z} \neq 0, \tag{2.2}$$

$$P(z) \equiv \mathrm{H}^{(2)}(z) B(z), \quad \varrho_P = r \leqslant n, \quad \varrho_{H^{(2)}} = \varrho_{H^{(1)}} = n,$$

$$\mathrm{H} \equiv [\mathrm{H}^{(1)} | \mathrm{H}^{(2)}], \quad \mathrm{H}^{(1)} \equiv \left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x_k\, \partial q_i}\right], \quad \mathrm{H}^{(2)} \equiv \left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x_k\, \partial p_j}\right],$$

$$F(z) \equiv F[x(z)], \quad x_i = q_i, \quad x_{n+i} = p_i, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \ 1 \leqslant k \leqslant 2n,$$

где используются обозначения (1.11), (2.1). С учетом матрицы Γ (2.1) Якоби из (1.5)—(1.7), (1.9), (1.10) при $u \equiv 0$ для (2.2) легко получить вид ее инвариантов динамики. Она имеет, в частности, инвариант Гамильтона $\mathcal{H}[x(z)] = \mathcal{H}[x(z_0)]$, инвариант Лиувилля

$$\tilde{I}_{2n} = \int_{\tilde{\mathfrak{D}}} \tilde{f}(z) |\Gamma(z)| \, dz_1 \, dz_2 \ldots dz_{2n-1} \, dz_{2n}, \quad \dot{\tilde{I}}_{2n} \equiv 0.$$

Ввиду неравенств (1.4) для решения задач I, II достаточно решить аналогичные задачи для системы (2.2), либо из асимптотической стабилизации в целом $z \equiv 0$ при $u = u_1(z) = u_1[z(x)] \equiv \tilde{u}_1(x)$ получим решение задачи I. Решение задачи II для системы (1.1), (1.2), (1.4) следует из экспоненциальной стабилизации в целом $z \equiv 0$ системы (2.2) при $u_2 = \tilde{u}_2(x) \equiv u_2[z(x)] = u_2[z]$ из

$$\|z[t]\| \leqslant b \|z_0\| \exp[a(t_0 - t)]; \quad z_0 \equiv z[t_0], \quad \forall z \in E^{2n},$$
$$b = \mathrm{const} > 0, \quad a = \mathrm{const} > 0, \tag{2.3}$$

и неравенств $\alpha = l_0 a > 0$, $l_1 b^{l_0} \|z_0\|^{l_0} \|x_0\|^{-1} \geqslant \beta > 0$, гарантирующих условие (1.12). На основе теорем Ляпунова [2–5, 11–17, 19] об устойчивости по первому приближению (2.2) вида

$$\dot{z}=G_0z+P_0u;\quad G_0\equiv G(0),\quad P_0\equiv P(0)\tag{2.4}$$

известно, что локальная стабилизируемость до асимптотической устойчивости $z\equiv 0$ системы (2.2) следует из стабилизируемости до асимптотической устойчивости линейной системы (2.4). Аналогичный вывод справедлив в ряде задач локальной асимптотической стабилизации, оптимальной по функционалу $\int\limits_{\infty}^{0} f_0\,d\tau$ с нелинейной функцией $f_0=f_0(z,u)\subset C_1[E^{2n}\times E^r]$, $f_0\geqslant 0$ [3]. Для стабилизируемости (2.4) достаточна ее полная управляемость, когда пара (G_0, P_0) удовлетворяет $\varrho[K_0]=2n$ [20], где

$$K_0=[P_0,\ G_0P_0,\ \dots,\ G_0^{2n-1}P_0],\quad \varrho[F]=\varrho_F=\operatorname{rank}F.$$

Тогда $\exists C_0$ — матрица $(r\times 2n)$ такая, что система $\dot{z}=(G_0+P_0C_0)z$ асимптотически устойчива, $C_0=\text{const}$.

Из (1.4) имеем спектральное представление Н, где

$$\mathrm{H}=Rh^2R^{\mathrm{T}},\quad h^2=\operatorname{diag}[(id_1)^2,\dots,(id_l)^2;\ h_1^2,\ \dots,\ h_p^2],\tag{2.5}$$

$$d_\lambda\neq 0,\quad \operatorname{Re}d_\lambda=d_\lambda;\quad 0\neq h_s=\operatorname{Re}h_s;\quad 1\leqslant\lambda\leqslant l,\quad 1\leqslant s\leqslant p,\quad p\geqslant n,$$

R — действительная ортогональная матрица $RR^{\mathrm{T}}=I_{2n2n}$, $l=2n-p$. С учетом (2.5) и свойств кососимметричных матриц [19] легко показать, что собственные числа g_k матрицы G симметричные нулю

$$\mp g_i\in\lambda(G),\quad \bar{g}_i\in\lambda(G),\quad g_i\neq 0;\quad 1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant k\leqslant 2n.$$

Все они будут чисто мнимыми [19] лишь если

$$i\,\mathbf{1}=R\begin{bmatrix}-I_{nn} & 0\\ 0 & I_{nn}\end{bmatrix}R^{\mathrm{T}},$$

ибо $\lambda(G):|\mathrm{H}\,\mathbf{1}-gI_{2n2n}|=|K-gI_{2n2n}|=0,$

$$-K^{\mathrm{T}}\equiv K\equiv hR^{\mathrm{T}}\,\mathbf{1}\,R^{\mathrm{T}}h.$$

Лишь тогда возможна устойчивость (2.2), $u\equiv 0$ (критический случай).

Класс $\{u_1(z)\}$ для системы (2.2) и, соответственно, $\{\tilde{u}_1(x)\}$ для асимптотической стабилизации $x\equiv 0$ системы (1.1), (1.2), (1.4) определим следующей модификацией теоремы IX из [16] принципа инвариантности [2, 11, 15, 16], необходимой ввиду ее обратимости [15, 16].

Теорема 1. *Пусть система* (2.2) *имеет функции* $v=v(z)$, $u=u_1(z)\subset C(E^{2n})$, *удовлетворяющие условиям*

$$v(0)=0;\quad v(z)\geqslant 0,\quad \forall z\in E^{2n};\quad v(z)\subset C_1[E^{2n}/0],\tag{2.6}$$

$$v(z)\nearrow l,\quad \|z\|\to\infty;\quad l>v(z);\quad 0<l=\text{const}\leqslant\infty,\tag{2.7}$$

$$\dot{v}(z)\underset{u=u_1(z)}{<}0\quad \text{на}\quad E^{2n}\backslash Z;\quad Z\equiv\{z\,|\,\dot{v}(z)\underset{u=u_1(z)}{=}0\},\tag{2.8}$$

$Z\backslash 0$ — *внеинвариантное* [15] *множество* (2.2), $u=u_1(z)$. (2.9)

Тогда $\forall u_1(z)$, — *допустимое* (2.8), (2.9), *дает асимптотическую устойчивость* $z\equiv 0$ *системы* (2.2) *в целом, т. е.* $u_1[z(x)]\equiv\tilde{u}_1(x)$.

Доказательство. Любое решение $z[t]$ при $0<\|z_0\|<\infty$ ограничено. Действительно, $v[z_0]=\lambda<l$ ограничено. В силу (2.6)—(2.9) функция $v(t)\equiv v[z(t)]\leqslant\lambda$, $t_0\leqslant t<\infty$, т. е. не возрастает и ограничена снизу на решении (2.2), $u=u_1(z)$. Любое $z[t]$ асимптотически стремится к максимальному инвариантному множеству $N, N \subseteq Z$ [2, 11, 15, 16] $z \to N$, $t \to +\infty$. Согласно (2.9) последнее доказывает теорему.

В (2.6), (2.7) ослаблены соответствующие требования теоремы IX [16] и аналогичных ей теорем [2, 11, 15, 16]. Оба [10] класса $\{\tilde{u}_1(x)\}$ асимптотических стабилизаторов системы (1.1)—(1.3) удовлетворяют критерию (2.6)—(2.9). В нем главными условиями служат два требования: существования $l \equiv \lim v[z(t)]$, $t \to +\infty$, когда $z \to N \subseteq Z$ при $t \to +\infty$, и ограниченности $\forall z[t]$ на $[t_0, \infty)$, — эквивалентной исключению $z = \infty \,\bar{\in}\, \omega_z$, где ω_z — предельное множество $\forall z[t]$ — решения (2.2), $u = u_1(z)$.

Определение. *Покой системы* (2.2), $u \equiv 0$ *вполне неустойчив при* $u = \hat{u}(z)$, *если для* $\forall z_0 \neq 0 \; \exists T_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ *такие постоянные, что* $\|z(t, z_0)\| \geqslant \delta_0$ *при* $T_0 \leqslant t < \infty$.

Стереографической проекцией E_z^{2n} на сферу S_ζ^{2n} (при $z = +\infty \leftrightarrow \zeta = 0$, где 0 — верхний полюс сферы) введем гомеоморфизм $z \leftrightarrow \zeta$, когда $(2.2) \leftrightarrow \sum (2.10) : \dot{\zeta} = \Phi(\zeta, u)$. Определим на сфере функцию Ляпунова равенствами

$$w(\zeta) \equiv v^{-1}(z(\zeta)), \quad w(0) = 0; \quad -\dot{w}(\zeta) = v^{-2}\dot{v}(z), \tag{2.10}$$

$$\dot{\zeta} = \Phi(\zeta, u); \quad \Phi(\zeta, u) = F(\zeta) + Q(\zeta)u, \quad \varrho_Q = r.$$

Тогда условия вполне неустойчивости $\zeta \equiv 0$ для Σ эквивалентны вполне неустойчивости $z = \infty$ системы (2.2), $u = \tilde{u}(z)$ [16] т. е. определяет для нее критерий ограниченности $\forall z[t]$ на $[t_0, \infty)$.
Определим представляющий самостоятельный интерес простой критерий вполне неустойчивости нуля (2.10) при $u = \hat{u}_3(\zeta)$. Пусть вне $\zeta = 0$ функция $w(\zeta)$ при $u = \hat{u}_3(\zeta)$ удовлетворяет для (2.10) неравенству

$$\dot{w}(\zeta) = \Phi(\zeta, \hat{u}_3(\zeta)) \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} \geqslant \vartheta(w); \quad w \neq 0, \quad w > 0 \tag{2.11}$$

в шаре $B_0 \equiv B(0, R_0)$ достаточно малого радиуса $R_0 = \mathrm{const}$, где скалярная функция $\vartheta(w)$ определена и непрерывна

$$\nu \subset C(0, w^M), \quad w^M \equiv \max_{B_0} w(\zeta). \tag{2.12}$$

Обозначим ∂B_0 сферу B_0 радиуса R_0 и введем постоянные

$$w_m \equiv \min_{\partial B_0} w(\zeta) = \mathrm{const} > 0, \quad w_M \equiv \max_{\partial B_0} w(\zeta) = \mathrm{const} > 0, \tag{2.13}$$

$$0 < w_m < w_M.$$

Идея построения искомого критерия состоит в поиске условий на систему (2.10)—(2.12), исключающих $\zeta = 0$ как предельную точку на основе допущения обратного. Пусть $\zeta_0 = \mathrm{const}$ — любая начальная точка решения с Ω-предельным множеством, включающим $\zeta = 0 \neq \zeta_0$. Возможны лишь два соответствующих ей типа положительных полутраекторий $\varphi^{(\alpha)}(t, \zeta_0)$, $t_0 \leqslant t < \infty$, $\alpha = 1, 2$. Первый тип имеет момент $T_1 = \mathrm{const} \geqslant 0$, после которого вся полутраектория $\varphi^{(1)}$ будет в B_0, где

$$\|\zeta^{(1)}[t]\| \leqslant R_0; \quad 0 < w^{(1)}[t] \leqslant w^M \geqslant w^{(1)}[T_1]; \quad T_1 \leqslant t < +\infty, \tag{2.14}$$

$$\varliminf_{t \to +\infty} w[\zeta^{(1)}[t]] = \inf_{T_1 \leqslant t < +\infty} w[\zeta^{(1)}[t]] = 0; \quad w^{(1)}[t] \equiv w[\zeta^{(1)}(t)].$$

Второй тип имеет последовательность $k \to \infty$ $\{[T'_k, T''_k]\}$ отрезков времени включения $\varphi^{(2)}(t, \zeta_0)$ в B_0, где T'_k, T''_k — соответственно моменты входа и выхода $\zeta^{(2)}[t]$ из B_0, $T''_k > T'_k \to \infty$, $k \to \infty$. Из (2.10), (2.13) для него имеем

$$w^{(2)}[T'_k],\ w^{(2)}[T''_k] \in [w_m, w_M]; \quad w^{(2)}[t] > 0, \quad t \in [T'_k, T''_k], \tag{2.15}$$

$$w^{(2)}[t] \equiv w[\zeta^{(2)}(t)]; \qquad \min_{t \in [T'_k, T''_k]} w^{(2)}[t] \equiv \omega_k > 0; \qquad \inf_{k \to \infty} \omega_k = 0.$$

Теорема 2. *Пусть система* (2.10) *имеет функции* $w(\zeta)$, $u = \hat{u}_3(\zeta) \subset C[S^{2n}_\zeta]$, *удовлетворяющие на* B_0 (2.12) *и дифференциальному неравенству* (2.11). *Если при* $0 < \hat{w}^{(1)}[T] \leqslant w^M$ *оно не имеет положительных решений* $w^{(1)}[t] > 0$ *на любом* $[T, \infty)$, *для которых*

$$\lim_{t \to +\infty} w^{(1)}[t] = 0, \qquad w[t] \equiv w^{(1)}[t], \tag{2.16}$$

а при $w^{(2)}(\tau)$, $w^{(2)}(T) \in [w_m, w_M]$, $\mathrm{const} \leqslant \tau \leqslant T < \infty$ не имеет также положительных решений $w^{(2)}[t] > 0$, $\tau \leqslant t \leqslant T$,

$$\min_{\tau \leqslant t \leqslant T} w^{(2)}[t] \equiv \omega[w^{(2)}; \tau, T] > 0$$

таких, что для них $\omega[w^{(2)}; \cdot]$-функционал исчезает:

$$\inf w[\cdot] = 0 \text{ на множестве } w^{(2)}[t], \ \forall \tau < \forall T, \tag{2.17}$$

то нуль системы (2.10) при $u = \hat{u}_3(\zeta)$ вполне неустойчив.

Доказательство. Действительно, ввиду возможных типов полутраекторий (2.14), (2.15) допущение существования примыкающих к нулю при $t_k \in [T'_k, T''_k]$, $t_k \to \infty$ приводит неравенства (2.16), (2.17) на $w[t]$ к несовместимости соответственно с последними в (2.14), (2.15) условиями на функцию $w[t]$. Поэтому при условиях (2.11), (2.12), (2.16), (2.17) имеем $\underline{\lim}\, w[t] = d = \mathrm{const} > 0$, $t \to +\infty$. Тогда для $\forall \zeta_0 \neq 0$ существует шар $\overline{B(0, \delta_0)}$, $\delta_0 = \mathrm{const} > 0$, вне которого на $[T_0, \infty)$ остается любая полутраектория (2.10) при $u = \hat{u}_3(\zeta)$. Последнее доказывает теорему 2.

С учетом обозначений (2.10) из условий (2.11)—(2.13), (2.16), (2.17), заменой $\zeta \to z$ можно получить критерий ограниченности решений (2.2) при $u = u_3(z) \equiv \hat{u}_3[\zeta(2)]$, обобщающий утверждение теоремы XVII [16] для стационарных систем.

Замечание 1. Если максимальное инвариантное множество $N_0^{(r_0)}$ для шара $\|z_0\| \leqslant r_0 = \mathrm{const}$ начальных значений $z_0 = z(t_0)$ будет нулем системы (2.2) ($u \equiv 0$) при достаточно малом $r_0 = \mathrm{const}$, то из критерия ограниченности $\forall z[t]$ системы (2.2) при $u = u_3[z]$ следует локальная асимптотическая стабилизация в шаре $B(0, r_0)$.

Критерии экспоненциальной устойчивости нуля (2.2), $u = u_2(z)$. Воспользуемся общим критерием экспоненциальной устойчивости нуля нелинейной стационарной/нестационарной системы [2], который усиливает соответствующие условия асимптотической устойчивости покоя в критерии Гана [15].

Для экспоненциальной устойчивости нуля системы

$$\dot{z} = f(t, z), \quad f(t, \circ) \equiv 0; \quad f \subset C_1[\mathfrak{R}], \quad \mathfrak{R} \equiv [\mathfrak{T} \times E^d], \quad \mathfrak{T} \equiv [0, T]$$

необходимо и достаточно существование z — определенно-положительной функции v и постоянных $c_\beta > 0$, $\beta = 1, 2, 3$, удовлетворяющих на $\mathfrak{R}$ неравенствам [2]

$$c_1\|z\|^2\leqslant v(t,z)\leqslant c_2\|z\|^2;\quad \|z\|^2=\sum_{s=1}^{d}x_s^2,\quad d\equiv\dim z, \tag{2.18}$$

$$\dot v=v_t+f\cdot v_z\leqslant -c_3\|z\|^2;\quad v\subset C_1[\mathfrak{R}],\quad T\leqslant+\infty. \tag{2.19}$$

Параметры (2.3) экспоненциальной устойчивости нуля удовлетворяют на $\mathfrak{R}$ оценкам сверху

$$a\geqslant 1/2\, c_3c_2^{-1}\equiv a_0=\mathrm{const}>0,\qquad b^2\leqslant c_2c_1^{-1}\equiv b_0^2=\mathrm{const}>0, \tag{2.20}$$

где a_0, b_0 — их худшие (гарантированные) значения.

С учетом (2.2) на основании (2.18), (2.19) для задачи П п. I класс $u_2[z]$ задан неравенством

$$v_z^{\mathrm{T}}P(z)\,u_2\leqslant -c_3\|z\|^2-v_z^{\mathrm{T}}G(z)z,\quad z\in E^{2n};\quad v_z=\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.21}$$

где $\forall v=v(z)\subset C_1[E^{2n}]$ удовлетворяет оценкам (2.18).

Используя сферическую норму $\|G\|_e$ матрицы G (2.2) [19, 20] при $\|v_z\|\leqslant d_1\|z\|$, $0<d_1=\mathrm{const}$ из (2.21) получим усиленное неравенство

$$P^{\mathrm{T}}(z)\,v_z\cdot u_2\leqslant -(c_3+d_1\lambda_M(H))\,\|z\|^2, \tag{2.22}$$

где $\lambda_M\equiv\lambda_{\max}(\mathrm{H})$, $\lambda_M^2(\mathrm{H})\geqslant\lambda_M(G^{\mathrm{T}}G)\equiv\|G\|_e^2$ достаточное для экспоненциальной стабилизации (2.2) любым решением $u_2=\hat u_2(z)$ (2.22), в частности, граничным, если $P^{\mathrm{T}}v_z\underset{Q^{2n}}{\neq}0$, $\forall Q^{2n}$ на E^{2n} то вида

$$\hat u_2=\hat u_2^0\equiv -\|z\|^2(d_1\lambda_M(H)+c_3)\,\|P^{\mathrm{T}}(z)\,v_z\|^{-2}P_z^{\mathrm{T}}v_z,\qquad \forall z\in Q^{2n}. \tag{2.23}$$

Гарантированный показатель устойчивости a_0 (2.20) для классов u_2, допустимых неравенствами (2.21)—(2.23), задан постоянными параметрами c_2, c_3 используемого потенциала $v(z)$ (2.18).

С учетом факторизации в (2.2) и условий (2.18) примем, в частности

$$v\equiv z^{\mathrm{T}}V(z)z,\quad V\equiv V^{\mathrm{T}};\quad c_1\leqslant\lambda_m(V)\leqslant\lambda_M(V)\leqslant c_2,\quad z\in E^{2n}, \tag{2.24}$$

$$\dot v=-z^{\mathrm{T}}W(z)z,\quad W\equiv W^{\mathrm{T}};\quad c_3\leqslant\lambda_m(W),\quad z\in E^{2n};\quad c_\beta=\mathrm{const},\quad 1\leqslant\beta\leqslant 3,$$

$$u\equiv U(z)z;\quad \lambda_m\equiv\lambda_{\min}(V),\quad \lambda_M(V)\equiv\lambda_{\max}(V),\quad \lambda_m(W)\equiv\lambda_{\min}(W);$$

где $C_1(E^{2n})\supset V, W$ — заданные $(2n\times 2n)$ — матричные функции от z, $C(E^{2n})\supset V(z)$ — искомая матричная функция, удовлетворяющая в силу (2.2), (2.24) следующему аналогу матричного уравнения Ляпунова

$$V(z)D(z)+D^{\mathrm{T}}(z)V(z)+Q(z)=-W(z), \tag{2.25}$$

где $D\equiv G+PU$, $Q\equiv[q_{km}]\equiv S\circ Dz$, $D\equiv[d_{s\sigma}]$,

$$S=[s_{km,\sigma}],\quad s_{km,\sigma}=\partial v_{km}/\partial z_\sigma;\quad q_{km}=\sum_{s,\sigma=1}^{2n}\frac{\partial v_{km}}{\partial z_s}d_{s\sigma}z_\sigma,$$

$$1\leqslant k,\quad m, s, \sigma\leqslant 2n.$$

Ввиду (2.24) условия (2.18), (2.19) выполнены, $u_2=U(z)z$ будет экспоненциальным стабилизатором $z\equiv 0$ системы (2.2), если на E^{2n} существует непрерывная матричная функция $U(z)$, удовлетворяющая уравнению (2.25) при $W\subset C(E^{2n})$ в (2.24).

Выбирая для простоты в (2.24) постоянную $V=\mathrm{const}=V_0>0$, из (2.25) получим аналогичный критерий определения класса $u_2^0(z)$ задачи II линейным уравнением

$$V_0 D(z) + D^{\mathrm{T}}(z) V_0 = -W(z); \quad Q \equiv 0, \tag{2.26}$$

$$D = D(z) = G(z) + P(z) U^0(z), \quad U^0(z) = U^0[z \mid V_0, W, G, P],$$

где $u_2^0 \equiv U^0(z) z$, V_0, W удовлетворяют (2.24), $C(E^{2n}) \supset U^0(z)$ — любое решение (2.26) при заданных матрицах V_0, W, G, P. Его поиск — двухэтапный: сперва находим достаточно сложное общее дифференциально-аналитическое решение $D(z)$ [19, 21] уравнения

$$V_0 X + X^{\mathrm{T}} V_0 = -W, \quad X \equiv D(z); \quad 0 < V_0 \equiv V_0^{\mathrm{T}}, \quad W \equiv W^{\mathrm{T}}, \tag{2.27}$$

затем находим множество (ибо $\varrho_P = r \leqslant n < 2n$) решений U^0 линейного уравнения

$$U^0 : P(z) U^0(z) = D(z) - G(z), \quad G(z) \equiv H(z)\, 1.$$

Введем $\mathcal{Y} \equiv R_0 X R_0^{\mathrm{T}}$ в частном случае выбора перестановочных V_0, W в (2.27), когда их спектральные представления $V_0 = R_0 v^0 R_0^{\mathrm{T}}$, $W = R_0 w R_0^{\mathrm{T}}$ имеют смысл (2.5)

$$R_0 = \mathrm{const}, \quad R_0 R_0^{\mathrm{T}} = I_{2n2n}, \quad v^0 \equiv \mathrm{diag}\,(v_k^0) = \mathrm{const} > 0, \quad w \equiv \mathrm{diag}\,(w_k) > 0.$$

Тогда из (2.27) имеем по-элементно множество X

$$D = X = R_0^{\mathrm{T}} \mathcal{Y} R_0, \quad \mathcal{Y} = [y_{km}]; \quad y_{kk} = -\frac{1}{2}\frac{w_k}{v_k^0} < 0, \quad y_{km} = -\frac{v_m^0}{v_k^0} y_{mk},$$

$$1 \leqslant k,\ m \leqslant 2n; \quad k \neq m.$$

Замечание 2. Введем обозначения [3]

$$\mathcal{B}[v, u \mid z] \equiv \dot{z} \cdot v_z + f_0(z, u); \quad f_0 \geqslant 0, \quad f_0 \subset C_1[E^{2n} \times E^r], \tag{2.28}$$

$$I \equiv \int_{t_0}^{\infty} f_0(z, u)\, d\sigma, \quad v(z_0) \equiv \min_u I, \quad z_0 = z[t_0], \quad t_0 = \mathrm{const} \in \mathcal{T}.$$

Если $v(z) \subset C_1[E^{2n}]$, $0 \neq z \in E^{2n}$, $v \subset C[E^{2n}]$, а в классах $\{u_\alpha[z]\}$, решающих задачи I, II, есть стабилизаторы $u_\alpha^0[z]$, удовлетворяющие неравенствам

$$\mathcal{B}[v, u \mid z] \geqslant \mathcal{B}[v, u_\alpha^0[z] \mid z] \equiv 0, \quad z \in E^{2n}, \quad u \in E^r; \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.29}$$

то на основании теоремы IV [3] и результатов обращения проблемы аналитического конструирования регуляторов [1, 4, 5] стабилизаторы $u_\alpha^0[z]$ (2.29) будут оптимальными в целом по функционалу I (2.28).

3. Пример. Рассмотрим норм-инвариантную систему (2.2) типа Атанса—Летова [6, 8]

$$dz'/dt = g_1(z) + u, \; dz''/dt = g_2(z) + P(z) u, \tag{3.1}$$

$$z = (z'^{\mathrm{T}}, z''^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad z' = (z_\gamma)^{\mathrm{T}}, \quad z'' = (z_\delta)^{\mathrm{T}}, \quad u = (u_\gamma)^{\mathrm{T}},$$

$$\dim z' = \dim u; \quad 1 \leqslant \gamma \leqslant r \leqslant n; \quad r + 1 \leqslant \delta \leqslant 2n$$

при $u \equiv 0$ по определению [6, 8], обладающую норм-инвариантом $h(z')$ со свойствами

$$h^0|_{u \equiv 0} \equiv 0; \quad h = h(z') > 0, \quad z' \neq 0, \quad h(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$h(\varepsilon z') = |\varepsilon| h(z'), \quad \forall\, \varepsilon \in E^1; \quad h(z') \subset C_1(E^r \backslash 0), \quad h \subset C(E^r)$$

с вектором допустимых управлений u в шаре $\|u\| \leqslant M = \mathrm{const} > 0$, функционалом минимизации затрат времени-топлива

$$I = \int_0^{t_*} (k_0\|u\| + k_1)\, d\sigma; \qquad k_0 = \mathrm{const} \geqslant 0, \qquad k_1 = \mathrm{const} \geqslant 0, \tag{3.3}$$

где время t_* асимптотической стабилизации z' — компоненты вектора z, когда $z' \to 0$ при $t \to t_* - 0$, не задано. Если $t_* < +\infty$, то с учетом замечания 2 в определенном на полуинтервале $[0, +\infty)$ новом времени τ имеем

$$\tau \equiv t_*(t_* - t)^{-1} - 1, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{(1+\tau)^2}{t_*} \frac{d}{d\tau}, \qquad \frac{dv}{d\tau} = \frac{t_*}{(1+\tau)^2} \frac{dv}{dt},$$

что сводит аналитическое конструирование $u_1[z']$, оптимальное по (3.2), к задаче I.

При $k_0 = 0$, $k_1 = 1$ условием оптимальности будет минимум времени t_* гашения z'; при $k_0 = 1$, $k_1 = 0$ — минимум затрат топлива, при $k_0 > 0$, $k_1 > 0$ — минимум их линейной комбинации. Используя условия (2.29) и критерий (2.6)—(2.9) при $v \equiv h(z') \equiv \|z'\|$ для системы (3.1), (3.2), аналогично [6, 8], получим оптимальный регулятор $u_1 = u_1^0(z')$, значение t_* и минимума $\tilde{v}$ функционала (3.3)

$$u^0 = -M \frac{z'}{\|z'\|}, \qquad t_* = \frac{\|z_0'\|}{M}, \qquad \tilde{v} = (k_0 + k_1 M^{-1}) h(z_0'), \tag{3.4}$$

$$\tilde{v} \equiv \min I, \qquad z_0' = z'[0], \qquad h(z') \equiv \|z'\| \equiv v(z').$$

Вдоль решения (3.1) с регулятором (3.4) величина $h^0 = -M$ — отрицательно определена, $v \equiv \|z'\|$ — бесконечно большая функция. Поэтому $u = u_1^0(z')$ будет оптимальным стабилизатором в целом движения $z' = 0$ системы (3.1).

Заключение

В конструировании регуляторов систем Гамильтона обычно [1, 9, 10, 12–15, 18, 20] ограничиваются лишь стабилизацией устойчивых при $u \equiv 0$ движений механических систем вида (1.3). При этом используемые в основном способы — линеаризации и минимизации на основе оптимального функционала в качестве потенциала Ляпунова v, ограничивают результирующий класс асимптотических стабилизаторов.

В отличие от них здесь рассмотрены задачи I, II для нелинейных систем Гамильтона общего вида (1.1), (1.4) с целью стабилизации как устойчивых, так и неустойчивых точек покоя без условий линеаризации и минимизации. Введены факторизирующие исходную систему (1.1), $u \equiv 0$ новые переменные (2.1) — скорости (1.1), $u \equiv 0$, в которых проблема поиска класса ее экспоненциальных регуляторов сведена к решению полученной модификации матричного уравнения Ляпунова (2.25). Установленный класс асимптотических стабилизаторов системы (1.1), (1.4) задан условиями (2.6)—(2.9) теоремы 1, обобщающими критерий принципа инвариантности Ла-Салля [16].

В теореме 2 предложен критерий (2.11)—(2.13), (2.16), (2.17) выбора стабилизаторов исходной системы, гарантирующих ограниченность ее решений. В замечании 2 дана оптимальная интерпретация (2.29) рассмотренных классов стабилизаторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колесников А. А.* Аналитическое конструирование оптимальных нелинейных систем. Таганрог, 1984.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1957.
3. *Красовский Н. Н. // Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966, 475—514.

4. *Румянцев В. В.* ПММ, 1970, **34**, вып. 3, 440—456.
5. *Румянцев В. В.* ПММ, 1972, **36**, вып. 6, 966—976.
6. *Кейс И. А.* МТТ, **43**, № 4, 1975, 44—52.
7. *Anchev, A. A.* AIAA J, 1973, **11**, Apr., 467—472.
8. *Athans, M., Falb, P.* Optimal Control. New York, McGraw-Hill Book Company, 1966.
9. *Pars, L. A.* A Treatise on Analytical Dynamics. London, Heinemann, 1968.
10. *Singh, S. N.* // J. Dynamic Syst. Measur. and control, 1982, **104**, 27—32.
11. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., Наука, 1967.
12. *Воронов А. А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М., Наука. 1979.
13. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М., Наука, 1985.
14. *Director, S. W., Rohrer, R. A.* Introduction to Systems Theory. New York, McGraw-Hill Book Company, 1972.
15. *Hahn, W.* Stability of Motion. New York, Springer-Verlag, 1967.
16. *La Salle, Y., Lefschetz, D.* Stability by Lyapunov's Direct Method. New York-London, Academic Press, 1961.
17. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., Наука, 1966.
18. *Bellman, R., Kalaba, R.* Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems. New York, American Elsevier Pub. Company, INC., 1965.
19. *Lancaster, P.* Theory of Matrices. New York-London, Academic Press, 1969.
20. *Kalman, R. E.* Contributions to the theory of optimal control. Symposium International. Public. por La Univ. Nac. Aut. de Mexico, 1961, 37—59.
21. *Гантмахер Ф. Л.* Теория матриц. М., Наука, 1967.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонии

Поступила в редакцию
17/VII 1989

Igor KEIS

MITTELINEAARSE HAMILTONI SÜSTEEMI LIIKUMISE ASÜMPTOOTILINE JA EKSPONENTSIAALNE STABILISEERIMINE

On vaadeldud üldise mittelineaarse statsionaarse Hamiltoni süsteemi (1.1), (1.4) tasakaalu $x=0$ globaalse asümptootilise ja eksponentsiaalse stabiliseerimise probleemi.

Stabiliseerimine realiseeritakse juhtimisvektorist u lineaarselt sõltuvate täiendavate jõududega, mille maatriksi B (1.2), $r=\varrho_B$ astak oleneb olekuvektorist x. Stabiliseerimisülesannet $x=0$ lahendada võimaldava süsteemi (1.1), (1.4) ($u=0$) faktoriseerimiseks [17] ja kvaasilineariseerimiseks [18] on kasutusele võetud uued (gradientsed) muutujad (2.1), (1.4). Lähteprobleem lahendatakse liikumise stabiilsuse teooriale tuginedes [2, 3, 4, 5, 11–15], kusjuures arvestatakse invariantsuse printsiibi [16] üldistusi.

Globaalse stabiliseerimise kriteeriumid $x=0$, mis määravad punktis 1 toodud ülesannetele vastavaid stabiliseerivate regulaatorite klasse, on esitatud tarvilike ning piisavate tingimuste kujul (2.6)—(2.9), (2.11)—(2.17), (2.24)—(2.27).

Tulemusi kasutatakse Athansi-Letovi süsteemide optimaalse stabiliseerimise ülesande lahendamisel.

Igor KEIS

ASYMPTOTICALLY AND EXPONENTIALLY STABILIZING FEEDBACK CONTROL FOR NONLINEAR HAMILTON SYSTEMS

The problem of the global asymptotic and exponential stabilization of the general stationary Hamiltonian system (1.1), (1.4) is investigated in the paper. Here the stabilization is provided by the additional forces linear in controls and the gain matrix B (1.2) depending on the state vector.

The problem is solved on the basis of the theory of the stability of the motion [2, 3, 4, 5, 11–15] together with generalized invariance principle of La Salle in (2.6)—(2.9).

Using the new factorization gradient variables (1.4), (2.1) of the quasilinearization [17, 18] the sufficient and necessary conditions for existence of nonlinear control laws for global asymptotic and exponential stability of (2.2) are derived in criteria (2.6)—(2.9); (2.18)—(2.22); (2.24)—(2.27), and in the modified Lyapunov matrix equation (2.25).

As by-product of the paper the criterion (2.11)—(2.17) for the boundedness of the solution (1.1), (1.4) is obtained, and the optimal stabilization controls (3.4) for the Athans-type mechanical systems [6, 8] are provided.