Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 3, 196—204
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.3.02

УДК 517.968

Урве КАНГРО

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

(Представил Г. Вайникко)

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$u(x)=\int_\Omega a(x,y)\ln|x-y|u(y)dy+f(x),\qquad x\in\Omega, \tag{1}$$

где $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ — открытое ограниченное множество. Уравнения такого рода возникают, например, при вычислении электрических полей [1]. Из общей теории многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений [2, 3] вытекает, что решение этого уравнения вместе с его первыми производными непрерывны на $\overline{\Omega}$. Вторые производные в общем случае могут иметь возле границы логарифмические особенности. Оказывается, что для уравнения (1) этот результат можно усилить. В статье описываются точно все особенности вторых производных при предположении, что граница области кусочно-ляпуновская кривая. Выяснилось, что названные особенности могут возникать только в угловых точках границы. Изучаются также условия, при выполнении которых особенностей нет.

1. Особенности вторых производных решения. В дальнейшем рассмотрим только кусочно-ляпуновскую границу.

Определение. *Кривая Γ называется кусочно-ляпуновской, если Γ состоит из конечного числа кривых Γ_k с конечной длиной, для которых существуют $M>0$, $0<\mu\leqslant 1$, такие, что*

$$\Theta(y,y')\leqslant M|y-y'|^\mu,\qquad y,y'\in\Gamma_k, \tag{2}$$

где $\Theta(y,y')$ — угол между положительными направлениями касательных к Γ_k в точках y и y' $(0\leqslant\Theta(y,y')\leqslant\pi)$.

Теорема. *Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ — открытое ограниченное множество с кусочно-ляпуновской границей Γ. Предположим, что $f\in C^2(\overline{\Omega})$, $a\in C^2(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$, и пусть интегральное уравнение (1) имеет решение $u\in L(\Omega)$. Тогда $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, причем в точках гладкости Γ вторые производные от u непрерывны вплоть до границы, а в окрестности любой однократной угловой точки $y^*\in\Gamma$ они имеют представление*

$$\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_j^2}=(-1)^ju(y^*)a(y^*\ y^*)\left[(\omega_1\omega_2-\omega_1'\omega_2')\ln|x-y^*|+\right.$$
$$\left.+(\omega_1^2-\omega_1'^2)\arg_*(x)\right]+v_j(x),\qquad j=1,2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_1\partial x_2}=u(y^*)a(y^*,y^*)\left[(\omega_1^2-\omega_1'^2)\ln|x-y^*|+\right.$$
$$\left.+(\omega_1'\omega_2'-\omega_1\omega_2)\arg_*(x)\right]+v(x), \tag{4}$$

где v и v_j — непрерывны в пересечении $\overline{\Omega}$ с окрестностью точки y^*, $\omega=(\omega_1, \omega_2)$ и $\omega'=(\omega'_1, \omega'_2)$ — пределы единичных внутренних нормалей к Γ при приближении к y^* вдоль Γ соответственно в положительном и отрицательном направлениях $\arg_*(x)=\operatorname{Arg}[x_1-y^*_1+i(x_2-y^*_2)]$, *причем однозначность этой функции достигается разрезом плоскости вдоль кривой в $\mathbf{R}^2\backslash\Omega$, начинающейся в точке y^*. Если y^* — многократная угловая точка, то ее можно разделить на однократные угловые точки, а затем сложить все особенности, возникающие в этих точках, отдельно.*

Частные случаи. Исследуем, когда вторая производная от u является ограниченной. В формуле (3) при $\ln|x-y^*|$ стоит $\omega_1\omega_2-\omega'_1\omega'_2$ Он равен нулю, если

1) $\omega=\pm\omega'$, т. е. односторонние внутренние нормали совпадают (граница гладкая в этой точке) или y^* — точка возврата границы;

2) $\omega_1=\pm\omega'_2$, $\omega_2=\pm\omega'_1$, т. е. односторонние нормали симметричны относительно прямой $x_2=x_1$ или прямой $x_2=-x_1$ (частный случай этого — прямой угол, с параллельными к координатным осям сторонами).

В формуле (4) при $\ln|x-y^*|$ стоит $\omega^2_1-\omega'^2_1$. Он равен нулю, если

1) $\omega=\pm\omega'$;

2) $\omega_1=\pm\omega'_1$, $\omega_2=\mp\omega'_2$, т. е. односторонние нормали симметричны относительно одной из осей.

Никакой особенности в точке y^* не возникает, если граница в этой точке гладкая или имеет точку возврата.

2. Свойства слабо сингулярных интегралов. Приведем несколько необходимых в дальнейшем вспомогательных результатов. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченное открытое множество.

Лемма 1. *Если функция $B(x,y)$ непрерывна на $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, то интегралы $\int\limits_\Omega B(x,y)\ln|x-y|dy$ и $\int\limits_\Omega B(x,y)|x-y|^{-\nu}dy$, где $\nu<n$, непрерывны на $\overline{\Omega}$.*

Для доказательства достаточно заменить функцию $\ln|x-y|$ или $|x-y|^{-\nu}$ непрерывной функцией, которая вне круга $|x-y|<\delta$ совпадает с первоначальной, и показать, что полученные интегралы (непрерывные функции) при $\delta\to\infty$ сходятся равномерно относительно x к первоначальному интегралу.

Следствие 1. *Пусть $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ — $(n-1)$-мерная кусочно гладкая поверхность с конечной мерой. Если $B(x,y)$ непрерывна на $\Gamma\times\Gamma$, то интегралы* $\int\limits_\Gamma B(x,y)\ln|x-y|dS_y$ и $\int\limits_\Gamma B(x,y)|x-y|^{-\nu}dS_y$, *где $\nu<n-1$, непрерывны на Γ.*

Лемма 2. *Пусть $\Gamma=\partial\Omega$ — кусочно гладкая поверхность с конечной мерой. Если $B(x,y)$ непрерывна на $\overline{\Omega}\times\Gamma$, то интегралы* $\int\limits_\Gamma B(x,y)\ln|x-y|dS_y$ и $\int\limits_\Gamma B(x,y)|x-y|^{-\nu}dS_y$ *где $\nu<n-1$, непрерывны на $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что функция $v(x)=\int\limits_\Gamma B(x,y)|x-y|^{-\nu}dS_y$ непрерывна на Γ. В силу отделения $x\in\Omega$ и $y\in\Gamma$ она непрерывна и на Ω. Осталось рассматривать только случай, когда $x\in\Omega$ приближается к некоторой точке $y^*\in\Gamma$. Обозначим $\Gamma_\delta=\{y\in\Gamma:|y-y^*|<\delta\}$.

Пусть $|x-y|<\dfrac{\delta}{2}$. Тогда

$$|v(x)-v(y^*)|\leqslant \int_{\Gamma\setminus\Gamma_\delta} |B(x,y)|x-y|^{-\nu}-B(y^*,y)|y^*-y|^{-\nu}|dS_y+$$
$$+\max_{x\in\overline{\Omega},\ y\in\Gamma} |B(x,y)|\int_{\Gamma_\delta}[|x-y|^{-\nu}+|y^*-y|^{-\nu}]dS_y.$$

Так как в первом интеграле $|x-y|>\frac{\delta}{2}$, $|y^*-y|\geqslant\delta$, то интеграл приближается при $x\to y^*$ к нулю. Интеграл $\int_{\Gamma_\delta}|y^*-y|^{-\nu}dS_y$ можно сделать сколь угодно малым, если выбирать достаточно малое δ. Для оценки интеграла $\int_{\Gamma_\delta}|x-y|^{-\nu}dS_y$ обозначим через $z(x)$ ближайшую к x точку на Γ_δ. Тогда

$$|x-y|\geqslant|x-z(x)|\geqslant|z(x)-y|-|y-x|$$

и, следовательно,

$$|x-y|\geqslant\frac{1}{2}|z(x)-y|.$$

Итак,

$$\int_{\Gamma_\delta}|x-y|^{-\nu}dS_y\leqslant 2^\nu\int_{\Gamma_\delta}|z(x)-y|^{-\nu}dS_y$$

и поэтому этот интеграл можно сделать сколь угодно малым. Мы получили, что $v(x)\to v(y^*)$ при $x\to y^*$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать непрерывность функции

$$\int_\Gamma B(x,y)\ln|x-y|\,dS_y.$$

Л е м м а 3. *Пусть функции* $B(x,y)$ *и* $\frac{\partial}{\partial x_i}B(x,y)$ *непрерывны на* $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. *Тогда функции* $\int_\Omega B(x,y)\ln|x-y|dy$, *где* $n>1$, *и* $\int_\Omega B(x,y)|x-y|^{-\nu}dy$, *где* $\nu<n-1$, *непрерывно дифференцируемы по* x_1 *на* $\overline{\Omega}$, *и их можно дифференцировать под знаком интеграла.*

Для доказательства заменим функцию $\ln|x-y|$ или $|x-y|^{-\nu}$ непрерывно дифференцируемой функцией, которая вне множества $|x-y|<\delta$ совпадает с первоначальной. Полученный интеграл можно дифференцировать под знаком интеграла и показать, что его производная при $\delta\to 0$ равномерно сходится к функции

$$\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}[B(x,y)|x-y|^{-\nu}]dy.$$

Если не выполнены предположения леммы 3, то для дифференцирования слабо сингулярного интеграла можно использовать следующую лемму.

Л е м м а 4. *Пусть* $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ *открытое ограниченное множество с кусочно гладкой границей* Γ. *Предположим, что функция* $K(x,y)$ *непрерывно дифференцируема на множестве* $(\Omega\times\Omega)\setminus\{x=y\}$ *и существует* $\nu\,(-\infty<\nu<n)$ *такое, что*

$$|D^\alpha_x K_\beta(x,y)|\leqslant C\begin{cases}1+|x-y|^{-\nu-|\alpha|}, & \nu+|\alpha|\neq 0,\\ 1+|\ln|x-y||, & \nu+|\alpha|=0,\end{cases}\quad |\alpha|+|\beta|\leqslant 1,$$

где $K_\beta(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\beta_1}\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\beta_n}K(x,y)$. *Тогда для* $u\in C^1(\overline{\Omega})$ *функция* $\int_\Omega K(x,y)u(y)dy$ *непрерывно дифференцируемая в* Ω *и*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_\Omega K(x,y)\,u(y)\,dy=\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial y_i}\right)K(x,y)\,u(y)\,dy+$$

$$+\int_\Omega K(x,y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\,dy+\int_\Gamma K(x,y)\,u(y)\,\omega_i(y)\,dS_y,$$

$$x\in\Omega,$$

где $\omega(y)=(\omega_1(y),\ \ldots,\ \omega_n(y))$ — *единичная внутренняя нормаль к* Γ *в точке* $y\in\Gamma$.

Доказательство этой леммы можно найти в работе [2].

3. Доказательство теоремы. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда решение уравнения (1) $u\in C^1(\bar\Omega)$ (см. [2]). В силу леммы 3 мы можем уравнение (1) дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}=\int_\Omega\frac{\partial a(x,y)}{\partial x_i}\ln|x-y|\,u(y)\,dy+$$

$$+\int_\Omega a(x,y)\,\frac{x_i-y_i}{(x-y)^2}\,u(y)\,dy+\frac{\partial f(x)}{\partial x_i},\tag{5}$$

$$i=1,\ 2,\quad x\in\Omega.$$

Здесь первый интеграл можно снова дифференцировать под знаком интеграла, а для второго пользуемся леммой 4. Тогда получим, что

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j\,\partial x_i}=\int_\Omega\frac{\partial^2 a(x,y)}{\partial x_j\,\partial x_i}\ln|x-y|\,u(y)\,dy+\int_\Omega\frac{\partial a(x,y)}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,u(y)\,dy+$$

$$+\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial y_j}\right)a(x,y)\,\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,u(y)\,dy+$$

$$+\int_\Omega a(x,y)\,\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}\,dy+$$

$$+\int_\Gamma a(x,y)\,\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,u(y)\,\omega_j(y)\,ds_y+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\,\partial x_i},$$

$$i,j=1,\ 2,\quad x\in\Omega.$$

Так как $\dfrac{x_i-y_i}{|x-y|^\alpha}$, где $\alpha<1$, непрерывная функция, то по лемме 1 здесь первые четыре интеграла непрерывны на $\bar\Omega$. Последний интеграл можем переписать в виде

$$\int_\Gamma a(x,y)\,\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,u(y)\,\omega_j(y)\,ds_y=$$

$$=\int_\Gamma(a(x,y)-a(x,x))\,\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,u(y)\,\omega_j(y)\,ds_y+$$

$$+a(x,x)\int_\Gamma\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,(u(y)-u(x))\,\omega_j(y)\,ds_y+$$

$$+a(x,x)\,u(x)\int_\Gamma\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,\omega_j(y)\,ds_y.\tag{6}$$

Функции a и u непрерывно дифференцируемы, поэтому

$$|a(x, y)-a(x, x)| \leqslant C|x-y|$$

и

$$|u(y)-u(x)| \leqslant C|x-y|.$$

Следовательно, в силу леммы 2 первые два интеграла в выражении (6) непрерывны на $\overline{\Omega}$. В итоге мы получим, что

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_i}=v_{ij}(x)+a(x, x)u(x)\int\limits_{\Gamma}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\omega_j(y)\,ds_y, \tag{7}$$

где v_{ij} некоторая непрерывная на $\overline{\Omega}$ функция.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\omega_j(y)\,ds_y$. Подинтегральная функция непрерывна на множестве $\Omega\times\Gamma$ и поэтому этот интеграл непрерывен на Ω. Исследуем случай, когда $x\in\Omega$ приближается к точке $y^*\in\Gamma$. Разделим интеграл на части:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\omega_j(y)\,ds_y=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\omega_j(y)\,ds_y.$$

Если $y^*\notin\Gamma_k$, то интеграл по Γ_k останется непрерывным при приближении x к y^* (подинтегральная функция непрерывна). Фиксируем произвольное k такое, что $y^*\in\Gamma_k$. Обозначим $\Gamma_\delta=\{y\in\Gamma_k : |y-y^*|\leqslant\delta\}$, где δ так мало, что Γ_δ состоит из одной кривой. Кроме того, пусть $M\delta^\mu\leqslant\frac{\pi}{4}$, где M и μ — числа из условия (2), соответствующие кривой Γ_k. Предположим, что x так близко к границе, что $|x-y^*|<\frac{\delta}{2}$.

Тогда для точек $y\in\Gamma_k\setminus\Gamma_\delta$ имеет место неравенство $|x-y|\geqslant\frac{\delta}{2}$ и, следовательно, интеграл по $\Gamma_k\setminus\Gamma_\delta$ непрерывен при приближении x к y^*.

Исследуем теперь интеграл $\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\omega_j(y)\,ds_y$. Пусть y^* — внутренняя точка кривой Γ_k. При достаточно малом δ окружность $|y-y^*|=\delta$ пересекается с Γ_k в двух точках. Проведем прямую через точки x в направлении $\omega(y^*)$. Точку пересечения этой прямой с Γ_δ обозначим y_x. Так как $\Theta(y, y^*)\leqslant M|y-y^*|^\mu\leqslant M\delta^\mu\leqslant\frac{\pi}{4}$ $(y\in\Gamma_\delta)$, то точка y_x единственная и непрерывно зависит от x. Кроме того, расстояние от точки x до кривой Γ_δ больше, чем до прямых, проведенных от точки y_x под углом $\frac{\pi}{4}$ с вышесконструированной прямой (см. рис. 1).

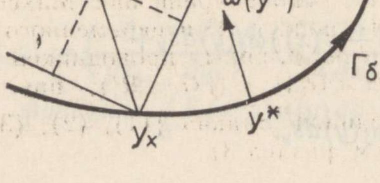

Рис. 1.

Значит, для каждой $y \in \Gamma_\delta$ имеет место неравенство $|x-y| \geqslant \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y_x|$. Следовательно,

$$|\omega_j(y)-\omega_j(y_x)| \leqslant M|y-y_x|^\mu \leqslant M(|y-x|+|x-y_x|)^\mu \leqslant C|y-x|^\mu. \quad (8)$$

Теперь разделим исследуемый интеграл на две части:

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,\omega_j(y)\,ds_y = \int_{\Gamma_\delta} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,(\omega_j(y)-\omega_j(y_x))\,ds_y +$$

$$+\omega_j(y_x)\int_{\Gamma_\delta} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,ds_y. \quad (9)$$

Так как y_x и также $\omega_j(y_x)$ непрерывно зависят от x и имеет место оценка (8), то первый интеграл здесь по лемме 2 непрерывен в окрестности точки y^*.

Если y^* — конечная точка кривой Γ_k, то возможно, что через точки x в направлении $\omega(y^*)$ проведенная прямая не пересекается с Γ_δ. В таком случае для получения точки y_x мы должны удлинить кривую Γ_δ касательной в точке y^*. Тогда останутся в силе все вышеизложенные оценки.

Рассмотрим второй интеграл в равенстве (9). Обозначим через $t_y=(t_1(y),\ t_2(y))$ касательную к Γ_δ в точке y. Для каждой $v \in C^1(\Gamma_\delta)$ имеют место формулы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(y)}{\partial \omega_y} = \omega_1(y)\,\dfrac{\partial v(y)}{\partial y_1} + \omega_2(y)\,\dfrac{\partial v(y)}{\partial y_2}, \\[2ex] \dfrac{\partial v(y)}{\partial t_y} = t_1(y)\,\dfrac{\partial v(y)}{\partial y_1} + t_2(y)\,\dfrac{\partial v(y)}{\partial y_2} = \omega_2(y)\,\dfrac{\partial v(y)}{\partial y_1} - \omega_1(y)\,\dfrac{\partial v(y)}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial v(y)}{\partial y_i} = \omega_i(y)\,\frac{\partial v(y)}{\partial \omega_y} - (-1)^i \omega_{3-i}(y)\,\frac{\partial v(y)}{\partial t_y}. \quad (10)$$

Пусть $v(y)=\ln|x-y|$, $x \in \Omega$, $y \in \Gamma_\delta$. Тогда

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\,ds_y = -\int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial y_i}\,ds_y = -\int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \omega_y}\,\omega_i(y)\,ds_y +$$

$$+(-1)^i \int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial t_y}\,\omega_{3-i}(y)\,ds_y =$$

$$= -\int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \omega_y}\,(\omega_i(y)-\omega_i(y_x))\,ds_y +$$

$$+(-1)^i \int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial t_y}\,(\omega_{3-i}(y)-\omega_{3-i}(y_x))\,ds_y -$$

$$-\omega_i(y_x)\int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \omega_y}\,ds_y +$$

$$+(-1)^i \omega_{3-i}(y_x)\int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial t_y}\,ds_y. \quad (11)$$

Здесь два первых интеграла непрерывны в окрестности y^*. Для вычисления двух последних заметим, что $\frac{\partial v}{\partial t_y}=\frac{dv}{ds}$, поэтому $\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{\partial v(y)}{\partial t_y}ds=$ $=v(B)-v(A)$, где A и B — начальная и конечная точка кривой Γ_δ. Если y^* внутренняя точка кривой Γ_k, то в силу отделения x и конечных точек Γ_δ интеграл $\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial t_y}ds_y$ останется непрерывным в процессе $x\to y^*$. Если y^* — начальная или конечная точка Γ_k, то

$$\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial t_y}ds_y=v(x)\pm\ln|x-y^*|,$$

где v — непрерывная функция в окрестности y^*, знак плюс соответствует конечной, знак минус начальной точке.

Для вычисления интеграла $\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \omega_y}ds_y$ используем теорию функций комплексной переменной. Пусть $z=y_1-x_1+i(y_2-x_2)$. Так как $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$ регулярна в области, где $\operatorname{Arg} z$ непрерывна, то по условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial \ln|z|}{\partial \omega_y}=\omega_1(y)\frac{\partial \ln|z|}{\partial y_1}+\omega_2(y)\frac{\partial \ln|z|}{\partial y_2}=$$

$$=\omega_1(y)\frac{\partial \operatorname{Arg} z}{\partial y_2}-\omega_2(y)\frac{\partial \operatorname{Arg} z}{\partial y_1}=\frac{\partial \operatorname{Arg} z}{\partial t_y}.$$

Пусть $\Delta(x)$ — приращение аргумента z, если y пройдет Γ_δ в положительном направлении. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \omega_y}ds_y=\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{\partial \operatorname{Arg} z}{\partial t_y}ds_y=\Delta(x).$$

Если y^* внутренняя точка Γ_k, то $\Delta(x)$ непрерывна в окрестности y^* ($\Delta(x)\to\Delta(y^*)$, при $x\to y^*$). Исследуем поведение $\Delta(x)$, если y^* — начальная точка Γ_k. Обозначим

$$\arg_*(x)=\operatorname{Arg}[x_1-y_1^*+i(x_2-y_2^*)],$$

причем для однозначности этой функции разрежем плоскость вдоль кривой в $\mathbf{R}^2\backslash\Omega$, начинающейся в точке y^*. Тогда

$$\Delta(x)+\alpha(x)+\arg_*(x)=const$$

(см. рис. 2).

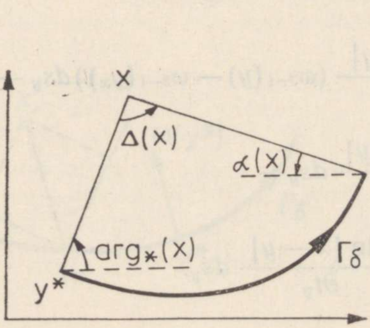

Рис. 2.

Так как в окрестности y^* функция $\alpha(x)$ непрерывна по x, то

$$\Delta(x) = -\arg_*(x) + v(x),$$

где v — некоторая непрерывная в окрестности y^* функция. Если y^* — конечная точка Γ_δ, то аналогично получим, что

$$\Delta(x) = \arg_*(x) + v(x).$$

Итак,

$$\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \omega_y} ds_y = \pm \arg_*(x) + v(x),$$

где плюс или минус в соответствии с тем, является y^* конечной или начальной точкой Γ_δ.

В итоге (см. (9), (11)) получим, что если y^* внутренняя точка Γ_k, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} \omega_j(y) ds_y$ непрерывен. В противном случае

$$\int\limits_{\Gamma_k} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} \omega_j(y) ds_y = v(x) \pm \omega_j(y_x)\omega_i(y_x) \arg_*(x) \mp$$

$$\mp (-1)^i \omega_j(y_x)\omega_{3-i}(y_x) \ln|x-y^*|,$$

где v — непрерывная в окрестности y^* функция (из знаков $\mp$ и $\pm$ верхний соответствует начальной, нижний конечной точке).
Так как Γ_k — кривая Ляпунова, то

$$|\omega_j(y_x) - \omega_j(y^*)| \leqslant M|y_x - y^*|^\mu \leqslant C|x-y|^\mu$$

и мы можем в последнем выражении y_x заменить на y^*. Обозначив через ω и ω' односторонние внутренние нормали к Γ при приближении к точке y^* вдоль Γ соответственно в положительном и отрицательном направлениях и учитывая то, что y^* является для одной кривой Γ_k начальной, а для другой конечной точкой, получим, что

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} \omega_j(y) ds_y = v(x) + (\omega'_i\omega'_j - \omega_i\omega_j) \arg_*(x) +$$

$$+ (-1)^i (\omega_j\omega_{3-i} - \omega'_j\omega'_{3-i}) \ln|x-y^*|.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно подставить полученное выражение в равенство (7) и заметить, что и здесь в силу непрерывной дифференцируемости функций a и u можно $a(x,x)$ и $u(x)$ заменить на $a(y^*, y^*)$ и $u(y^*)$.

Замечание 1. Теорему можно применить и для вычисления особенностей интеграла $\int\limits_{\Omega} a(x,y) \ln|x-y| u(y) dy$, где $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Замечание 2. Если $f \in C^1(\overline{\Omega})$, но вторая производная свободного члена имеет какие-либо особенности, то для получения особенности решения надо их сложить с особенностями, описанными в теореме.

Замечание 3. В теореме $\overline{\Omega}$ можно заменить замыканием Ω по внутренней метрике (внутреннее расстояние между $x_1, x_2 \in \Omega$ — инфимимум длин ломаных в Ω, соединяющих точки x_1 и x_2). Это позволяет нам описать особенности решения уравнения (1), если область имеет разрезы, вдоль которых функции a, f, и следовательно, u могут иметь разрывы первого рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Crouzeix, M., Decloux, J.* A bidimensional electromagnetic problem. Rennes, Univ. de Rennes, 1988.
2. *Вайникко Г. М.* // Матем. сборник, 1989, 180, № 12, 1709—1723.
3. *Pitkäranta, J.* // SIAM J. Math. Anal., 1980. 11, № 6, 952—968.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонии

Поступила в редакцию
16/I 1990

Urve KANGRO

KAHEMÕÕTMELISE LOGARITMILISE TUUMAGA INTEGRAALVÕRRANDI LAHENDI SILEDUS

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_\Omega a(x, y) \ln |x - y| \, u(y) \, dy + f(x), \qquad x \in \Omega,$$

kus $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ on lahtine tõkestatud hulk, mille raja on tükiti Ljapunovi kõver. Eeldame, et sellel võrrandil leidub lahend $u \in L(\Omega)$. Mitmemõõtmeliste nõrgalt singulaarsete integraalvõrrandite teooriast [2, 3] on teada, et kui $a \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ja $f \in C^2(\overline{\Omega})$, siis $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, lahendi teist järku tuletistel võib rajal olla logaritmiline iseärasus. Selgus, et tegelikult saavad iseärasused paikneda vaid raja nurgapunktides. Käesolevas artiklis on täpselt välja eraldatud kõik lahendi teise tuletise iseärasused (valemid (3) ja (4)).

Urve KANGRO

THE SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATION WITH LOGARITHMIC KERNEL

Examine a linear integral equation

$$u(x) = \int_\Omega a(x, y) \ln |x - y| \, u(y) \, dy + f(x), \qquad x \in \Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ is an open bounded set with piecewise Lyapunov boundary. Assume that the equation has a solution $u \in L(\Omega)$. From [2, 3] follows that if $a \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ and $f \in C^2(\overline{\Omega})$, then $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, second derivatives of the solution may have logarithmic singularity near the boundary. It appears that singularities can actually be placed only at the corners of the boundary. In this paper the author has exactly described all the singularities of the second derivativies of the solution (formulas (3) and (4)).