Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 3, 185—195
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.3.01

УДК 519.642

Геннадий ВАЙНИККО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ—ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

1. Введение: внутренняя—внешняя задача

Пусть $G\subset\mathbf{R}^n$ — открытое ограниченное множество, $n\geqslant 2$, a и f — заданные ограниченные непрерывные комплекснозначные функции на G (пишем, $a, f\in BC(G)$). Ставится следующая задача: найти функцию $\varphi\in C^1(\mathbf{R}^n)\cap W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ такую, что

$$\Delta\varphi(x)=a(x)\varphi(x)+f(x),\qquad x\in G, \tag{1}$$

$$\Delta\varphi(x)=0,\quad x\in\mathbf{R}^n\setminus\overline{G}, \tag{2}$$

причем для $n\geqslant 3$

$$\varphi(x)\to 0\qquad\text{при}\qquad |x|\to\infty, \tag{3}$$

а для $n=2$

$$|\varphi(x)|\ \text{ограничена при}\ |x|\to\infty. \tag{3$'$}$$

Здесь использованы стандартные обозначения: $\overline{G}$ — замыкание G, $C^1(\mathbf{R}^n)$ — пространство непрерывно дифференцируемых на $\mathbf{R}^n$ (комплекснозначных) функций, $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ — пространство функций на $\mathbf{R}^n$, имеющих обобщенные производные до второго порядка, которые квадратично суммируемы на любом шаре $B(0,r)=\{x\in\mathbf{R}^n\colon |x|<r\}$, $r>0$. Вместо $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^p)$ в постановке задачи с равным успехом можно было бы применять $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$. Заметим также, что условие $\varphi\in C^1(\mathbf{R}^n)$ включает в себя стандартные условия о равенстве односторонних пределов φ на ∂G и равенстве односторонних пределов нормальной производной от φ на ∂G, если граница ∂G гладкая.

В данной статье даются интегральные формулировки задач $\{(1), (2), (3)\}$ и $\{(1), (2), (3')\}$ и предлагается некоторый простой метод кубатурных формул для решения получаемых интегральных уравнений со слабо особым ядром, сходящийся в случае достаточно гладких функций a и f с быстротой $O(h^2|\ln h|)$, где h — шаг дискретизации. При построении кубатурной формулы мы следим за регулярным расположением узлов в G, так чтобы для решения системы уравнений получаемого метода можно было привлекать быстрое преобразование Фурье. Для решения системы с числом $O(h^{-n})$ неизвестных понадобится $O(h^{-n}|\ln h|)$ арифметических действий.

Задача $\{(1), (2), (3')\}$ представляет определенный интерес в теории электромагнитных полей. В [1] на основе уравнений Максвелла к этой задаче сведен расчет магнитного поля в $\mathbf{R}^3$ и переменного тока в системе параллельных оси x_3 бесконечно длинных проводников с поперечными сечениями $G_1, \ldots, G_k$ $(G\equiv G_1\cup\ldots\cup G_k\subset\mathbf{R}^2)$; при этом $a(x)\equiv\alpha\sqrt{-1}$, α — вещественная постоянная. Задача $\{(1), (2), (3')\}$ в таком случае однозначно разрешима (см. раздел 3).

2. Интегральная формулировка задачи в случае $n \geqslant 3$

Решение задачи (1)—(3) будем разыскивать в виде ньютонова потенциала (см. [2])

$$\varphi(x) = c_n \int_G |x-y|^{-(n-2)} u(y)\,dy, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad c_n = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}, \tag{4}$$

где $u \in BC(G)$ — подлежащая определению плотность. Условие (3), очевидно, выполнено. Первые производные от φ можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла (результат снова — слабо сингулярный интеграл), и легко видеть, что $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n)$. Далее, хорошо известно, что в смысле обобщенных функций, а значит, и в смысле поточечного равенства

$$\Delta\varphi(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{G}, \end{cases}$$

откуда следует, что $\varphi \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, а также условие (2). Условие (1) примет вид интегрального уравнения

$$u(x) = c_n a(x) \int_G |x-y|^{-(n-2)} u(y)\,dy + f(x), \quad x \in G. \tag{5}$$

Итак, для решения задачи (1)—(3) следует решить интегральное уравнение (5) относительно u и затем применить формулу (4). В действительности, при помощи (4) следует $\varphi(x)$ вычислять лишь для $x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{G}$, так как для $x \in G$ из (4) и (5) получаем

$$\varphi(x) = [u(x) - f(x)]/a(x).$$

Убедимся, что указанным образом исчерпываются все решения задачи (1)—(3). Действительно, пусть $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n) \cap W^{2,2}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ — любое решение задачи (1)—(3). Обозначим

$$u(x) = \Delta\varphi(x) = a(x)\varphi(x) + f(x), \quad x \in G,$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - c_n \int_G |x-y|^{-(n-2)} u(y)\,dy, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Ясно, что $u \in BC(G)$, $\psi \in C^1(\mathbf{R}^n) \cap W^{2,2}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, $\Delta\psi(x) = 0$ как для $x \in G$, так и для $x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{G}$, т. е. $\Delta\psi(x) = 0$ почти всюду в $\mathbf{R}^n$. Таким образом, $\Delta\psi = 0$ в смысле распределений на $\mathbf{R}^n$, а в силу свойства гипоэллиптичности оператора Лапласа $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\Delta\psi(x) = 0$ всюду в $\mathbf{R}^n$. Далее, $\psi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Теперь из принципа максимума для гармонических функций следует, что $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, т. е. φ имеет представление (4) с $u(x) = \Delta\varphi(x)$, $x \in G$, что и требовалось доказать.

Задача (1)—(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешимо интегральное уравнение (5), т. е. когда соответствующее однородное интегральное уравнение $u = Tu$ имеет в пространстве $BC(G)$ лишь нулевое решение. Заметим, что оператор $T^2: BC(G) \to BC(G)$ вполне непрерывен.

3. Интегральная формулировка задачи в случае $n=2$

Решение задачи $\{(1), (2), (3')\}$ будем разыскивать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_G \ln|x-y|\, u(y)\,dy + b, \quad x \in \mathbf{R}^2, \tag{6}$$

где следует определить плотность $u \in BC(G)$ и постоянную b. Снова

$\varphi \in C^1(\mathbf{R}^2)$ и $\Delta\varphi(x)=u(x)$ для $x\in G$, $\Delta\varphi(x)=0$ для $x\in\mathbf{R}^2\setminus\bar{G}$, выполнено (2), а (1) примет вид

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}a(x)\int\limits_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy+ba(x)+f(x), \qquad x\in G. \tag{7}$$

Условие (3′) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_G u(x)\,dx=0, \tag{8}$$

в чем убеждаемся, переписав (6) в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_G \ln\frac{|x-y|}{|x|}\,u(y)\,dy+\frac{1}{2\pi}\ln(x)\int\limits_G u(y)\,dy+b$$

и заметив, что первый интеграл при $|x|\to\infty$ стремится к нулю, так как $\ln(|x-y|/|x|)\to 0$ равномерно по $y\in G$. При этом $b=\lim_{|x|\to\infty}\varphi(x)$, если выполнено (8).

Итак, для решения задачи $\{(1),\ (2),\ (3')\}$ следует решить задачу $\{(7),\ (8)\}$ относительно u и b и затем применить формулу (6); для $x\in G$ снова имеем $\varphi(x)=[u(x)-f(x)]/a(x)$, так что формулу (6) в действительности достаточно применять для $x\in\mathbf{R}^2\setminus\bar{G}$. Нетрудно также проверить, что указанным образом исчерпываются все решения задачи $\{(1),\ (2),\ (3')\}$.

Задача $\{(1),\ (2),\ (3')\}$ однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешима задача $\{(7),\ (8)\}$. Задача $\{(7),\ (8)\}$ сохраняет фредгольмовость — для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}a(x)\int\limits_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy+ba(x), \qquad \int\limits_G u(x)\,dx=0$$

имела лишь нулевое решение $u=0$, $b=0$. Укажем одно достаточное условие для этого: $a,\ \dfrac{1}{a}\in BC(G)$, причем мнимая часть $\operatorname{Im} a(x)$ в G всюду положительна или всюду отрицательна. Действительно, пусть $u\in BC(G)$, $b\in\mathbf{C}$ — решение однородной задачи. Тогда

$$\frac{u(x)}{|a(x)|^2}\bar{a}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy+b, \qquad \int\limits_G u(y)\,dy=0.$$

Помножив обе части первого равенства скалярно на u с учетом второго равенства, получаем равенство

$$\int\limits_G \frac{|u(x)|^2}{|a(x)|^2}\bar{a}(x)\,dx=(\Lambda u,\ u),$$

где число

$$(\Lambda u,\ u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_G\int\limits_G \ln|x-y|\,u(y)\,\bar{u}(x)\,dy\,dx$$

вещественно в силу симметричности ядра $\ln|x-y|$. Поскольку $\operatorname{Im} a(x)>0$ или $\operatorname{Im} a(x)<0$ всюду в G, то такое равенство возможно лишь при $u(x)\equiv 0$, откуда, в свою очередь, следует $b=0$, что и требовалось доказать.

Необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи $\{(7),\ (8)\}$ можно перефразировать так: (i) однородное интегральное уравнение

$$u(x)=\frac{a(x)}{2\pi}\int_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy$$

имеет лишь нулевое решение; (ii) для решения u_a уравнения

$$u(x)=\frac{a(x)}{2\pi}\int_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy+a(x), \qquad x\in G, \tag{9}$$

имеет место неравенство $\int_G u_a(x)\,dx\neq 0$.

При соблюдении условий (i) и (ii) решение задачи $\{(7),(8)\}$ дается формулой

$$b=-\int_G u_f(x)\,dx\Big/\int_G u_a(x)\,dx, \qquad u(x)=u_f(x)+bu_a(x), \qquad x\in G,$$

где u_f — решение уравнения

$$u(x)=\frac{a(x)}{2\pi}\int_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy+f(x), \qquad x\in G. \tag{10}$$

Итак, решение задачи $\{(7),(8)\}$ сводится к решению двух стандартных интегральных уравнений (9) и (10) с логарифмически-особым ядром. Однако в численном плане иногда целесообразнее решать задачу $\{(7),(8)\}$ непосредственно.

4. Метод кубатурных формул

1. Интегральные уравнения (5) и (9), (10), а также сопряженные с ними уравнения объединим в уравнение

$$u(x)=\int_G K(x,y)\,u(y)\,dy+f(x), \qquad x\in G, \tag{11}$$

где

$$K(x,y)=\begin{cases} a_1(x)\ln|x-y|\,a_2(y), & n=2,\\ a_1(x)\,|x-y|^{-(n-2)}a_2(y), & n\geqslant 3.\end{cases} \tag{12}$$

По сравнению с разделом 1 усилим теперь условия гладкости на функции a_1, a_2, f — будем считать, что они принадлежат весовому классу $C^{2,n-1}(G)$, который состоит из функций $u\in BC(G)\cap C^2(G)$, таких что

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|\leqslant c(1+|\ln\varrho(x)|), \qquad \left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k\,\partial x_l}\right|\leqslant c\varrho(x)^{-1}$$

$$(x\in G,\ k,l=1,\ldots,n), \tag{13}$$

где $c=c_u$ — постоянная, $\varrho(x)=\min_{y\in\partial G}|x-y|$ — расстояние от x до границы ∂G. Кроме того, предполагается, что a_1, a_2, $f\in C(G^*)$, где G^* — пополнение G по «внутренней» метрике d_G : для $x^1, x^2\in G$ их «внутреннее» расстояние $d_G(x^1,x^2)$ — это инфимум длин ломаных, соединяющих эти точки и лежащих в G; если x^1 и x^2 расположены в разных компонентах связности множества G, то положим $d_G(x^1,x^2)=\infty$. Условие $u\in C(G^*)$ означает, что u непрерывна в G и кусочно-непрерывна в $\bar G$, имея конечные пределы во всех точках ∂G, но, возможно, разные по разным компонентам связности или с разных сторон (внутренней) границы в пределах одной компоненты связности.

2. Построим некоторую кубатурную формулу с регулярным расположением узлов в G:

$$\int_G u(x)\,dx\approx\sum_{jh\in G} w_{jh}\,u(jh). \tag{14}$$

Здесь $h>0$ — параметр дискретизации, $j=(j_1, \dots, j_n)\in \mathbf{Z}^n$ — точка (мультииндекс) с целочисленными координатами, веса $w_{jh}=\operatorname{mes} G_{jh}$ — объемы некоторых открытых множеств (ячеек) $G_{jh}\subset \mathbf{R}^n$, таких что

$$G_{ih}\cap G_{jh}=\varnothing \quad \text{при} \quad i\neq j \tag{15}$$

и сумма $\bar{G}_h=\bigcup_{jh\in G}\bar{G}_{jh}$ достаточно хорошо аппроксимирует $\bar{G}$:

$$(\bar{G}_h\setminus\bar{G})\cup(\bar{G}\setminus\bar{G}_h)\subset\{x\in\mathbf{R}^n:\ \varrho(x)\leqslant ch^2\}. \tag{16}$$

Более точно, если $\operatorname{dist}\{jh, \partial G\}\geqslant 2\sqrt{n}\,h$, то положим

$$w_{jh}=h^n,$$

$$G_{jh}=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ \left(j_k-\frac{1}{2}\right)h<x_k<\left(j_k+\frac{1}{2}\right)h,\ k=1, \dots, n\right\}\subset G. \tag{17}$$

Если же $\operatorname{dist}(jh, \partial G)<2\sqrt{n}\,h$, $jh\in G$, то строение ячейки G_{jh} довольно произвольно, требуется лишь, чтобы, кроме (15) и (16), соблюдались условия

$$jh\in G_{jh}, \quad \operatorname{diam} G_{jh}\leqslant ch, \quad d_G\text{-}\operatorname{diam}(G_{jh}\cap G)\leqslant ch, \tag{18}$$

где постоянная c не зависит от h, а d_G-диаметр соответствует метрике d_G. Условия (18), очевидно, выполнены и для ячеек (17).

Следует отметить, что существование подобного разбиения G на ячейки $G_{jh}\ni jh$ при всех $h>0$, хотя и приближенное (см. (16)), налагает на G определенные ограничения. Достаточно принять условие конуса [3]. Заметим также, что условие (16) позволяет «спрямлять» C^2-гладкую в пределах ячейки часть границы ∂G, используя секущие или касательные плоскости. Тем самым упрощается вычисление весов $w_{jh}=\operatorname{mes} G_{jh}$.

3. Основываясь на кубатурной формуле (14), построим метод приближенного решения уравнения (11):

$$u_{ih}=\sum_{\substack{jh\in G\\ j\neq i}} K(ih, jh)\,w_{jh}u_{jh}+f(ih) \qquad (ih\in G). \tag{19}$$

Здесь u_{ih} — приближенное значение решения $u(x)$ уравнения (11) в узле $ih\in G$. Уравнения (10) выписаны для тех $i=(i_1, \dots, i_n)\in\mathbf{Z}^n$, для которых $ih\in G$. Поскольку ядро $K(x, y)$ при $x=y$ обращается в бесконечность, выбросим из суммы член с $j=i$.

Теорема 1. *Пусть граница ∂G кусочно гладка, G удовлетворяет условию конуса, и веса $w_{jh}=\operatorname{mes} G_{jh}$ кубатурной формулы* (14) *подчинены условиям* (15)—(18). *Пусть ядро $K(x, y)$ имеет вид* (12), $a_1, a_2, f\in C(G^*)\cap C^{2,n-1}(G)$ *и пусть число* 1 *не является характеристическим значением уравнения* (11). *Тогда существует такое $h_*>0$, что при $0<h<h_*$ система уравнений* (19) *однозначно разрешима, и*

$$\max_{ih\in G}|u_{ih}-u(ih)|\leqslant ch^2(1+|\ln h|), \tag{20}$$

где u — решение уравнения (11), $u\in C(G^*)\cap C^{2,n-1}(G)$.

Доказательство подобной теоремы для более общего класса уравнений и более общего класса кубатурных формул приводится в другой работе автора. Наметим здесь лишь схему рассуждений. Введем пространство E_h определенных на сетке $\{jh:\ jh\in G\}$ сеточных функций с нормой

$$\|u_h\|=\|u_h\|_{E_h}=\max_{jh\in G}|u_h(jh)|, \qquad u_h\in E_h.$$

Линейные операторы в E_h определены матрицами $A_h=(a_{ijh})_{ih,\, jh\in G}$; норма в E_h индуцирует норму

$$\|A_h\|=\|A_h\|_{L(E_h,\, E_h)}=\max_{ih\in G}\sum_{jh\in G}|a_{ijh}|.$$

Систему линейных алгебраических уравнений (19) трактуем как линейное уравнение $u_h=T_hu_h+p_hf$ в пространстве E_h, где $T_h=(t_{ijh})_{ih,\, jh\in G}$ — матрица с элементами

$$t_{ijh}=\begin{cases}K(ih, jh)\,w_{jh}, & j\neq i\\ 0, & j=i\end{cases}\qquad (ih, jh\in G),$$

а $p_hf\in E_h$ — сужение функции f на сетку $\{jh\colon jh\in G\}$. Доказывается свойством устойчивости

$$\|(I_h-T_h)^{-1}\|\leqslant c=\mathrm{const}\qquad (0<h<h_*)$$

и аппроксимационное свойство

$$\|T_hp_hu-p_hTu\|\leqslant c'h^2(1+|\ln h|),$$

где I_h — единичный оператор в E_h, u — решение уравнения (11), причем в силу результатов [4] $u\in C(G^*)\cap C^{2,n-1}(G)$. Из этих неравенств следует, что

$$\|u_h-p_hu\|\leqslant c''h^2(1+|\ln h|),$$

т. е. справедлива оценка (20).

В условиях теоремы 1 свойство устойчивости допускает следующее уточнение:

$$\|(I_h-T_h)^{-1}\|\leqslant\|(I-T)^{-1}\|_{L(C(G^*),\, C(G^*))}+ch(1+|\ln h|).$$

Если $a_1, a_2\in BC(G)$ и a_1 удовлетворяет условию Гельдера с показателем $q\in(0, 1]$ (см. (22) ниже), то

$$\|(I_h-T_h)^{-1}\|\leqslant\|(I-T)^{-1}\|_{L(C(G^*),\, C(G^*))}+ch^q\qquad (0<h<h_*),$$

причем величина h_* определяется неравенством вида $ch^q\|(I-T)^{-1}\|<1$. При этом дифференцируемость функций a_1 и a_2 несущественна (условие $a_1, a_2, f\in C^{2,n-1}(G)$ используется лишь при установлении аппроксимационного свойства).

5. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Трудности решения системы уравнений (19) вызваны ее большой размерностью $N\asymp h^{-n}$. Методом Гаусса или другими прямыми методами подобную систему можно решить лишь при грубых дискретизациях $(h=h_0)$. Комбинируя итерационные методы [5], можно систему (19) решить и при $h\ll h_0$. Конкретизируем один подобный метод.

1. Будем считать, что h_0/h — целое число. Исходя из (приближенного) разбиения G на ячейки $G_{jh}\,(jh\in G)$, описанного в разделе 4, построим (тоже приближенное) разбиение G на ячейки G_{jh_0} $(jh_0\in G)$. Объединим в G_{jh_0} ячейки $G_{j'h}$, расположенные вблизи точки jh_0. Предполагается, что каждая ячейка $G_{j'h}$ $(j'h\in G)$ входит в состав какого-то «блока» G_{jh_0} и что для разбиения $\{G_{jh_0}\}_{jh_0\in G}$ выполняются условия раздела 4 (условия (15), (17) и (18) с заменой h на h_0). Введем в рассмотрение «оператор сужения» $p_{h_0h}\in L(E_h, E_{h_0})$ и «оператор кусочно постоянного восполнения» $p_{hh_0}\in L(E_{h_0}, E_h)$:

$$(p_{h_0h}u_h)(jh_0)=u_h(j'h)\quad \text{с}\quad j'=(h_0/h)\,j\quad (u_h\in E_h).$$

$$(p_{hh_0}u_{h_0})(j'h)=u_{h_0}(jh_0)\quad \text{для}\quad j'h\in G_{jh_0}\quad (u_{h_0}\in E_{h_0}).$$

Построим итерационную схему (ср. [5])

$$u_h^{k+1}=T_{h,h_0}u_h^k+f_{h,h_0} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{21}$$

где

$$T_{h,h_0}=[I_h-p_{hh_0}(I_{h_0}-T_{h_0})^{-1}p_{h_0h}(I_h-T_h)]T_h\in L(E_h,E_h),$$
$$f_{h,h_0}=p_hf+p_{hh_0}(I_{h_0}-T_{h_0})^{-1}p_{h_0h}T_hp_hf\in E_h.$$

Теорема 2. *Пусть G удовлетворяет условию конуса, ядро $K(x,y)$ имеет вид* (12), *причем функции $a_1, a_2\in BC(G)$ удовлетворяют условию Гельдера*

$$\left.\begin{aligned}|a_1(x^1)-a_1(x^2)|\leqslant c[d_G(x^1,x^2)]^q,\\ |a_2(x^1)-a_2(x^2)|\leqslant c[d_G(x^1,x^2)]^q,\end{aligned}\right.\quad x^1,x^2\in G\quad (0<q\leqslant 1). \tag{22}$$

Число 1 пусть не является характеристическим для уравнения (11). *Пусть разбиения $\{G_{j'h}: j'h\in G\}$ и $\{G_{jh_0}: jh_0\in G\}$ подчинены указанным выше условиям. Тогда*

$$\|T_{h,h_0}\|_{L(E_h,E_h)}\leqslant ch_0^q \tag{23}$$

и, следовательно, итерации (21) *при $ch_0^q<1$ сходятся; пределом приближений u_h^k при $k\to\infty$ является решение u_h системы уравнений* (19).

Мы отложим доказательство теоремы 2 до следующего раздела и проведем сейчас обсуждение.

2. Систему (19) естественно решить с точностью h^2. В силу (23) число k_* необходимых для этого итераций (21) связано с h и h_0 соотношением $h_0^{qk_*}\asymp h^2$, т. е. $k_*\asymp|\ln h|/|\ln h_0|$ (считаем, что $h_0<1$). На каждом итерационном шаге нужно дважды применять матрицу T_h к вектору размерности $N\asymp h^{-n}$ (для этого понадобится $2N^2\asymp h^{-2n}$ умножений и сложений) и один раз матрицу $(I_{h_0}-T_{h_0})^{-1}$ к вектору размерности $N_0\asymp h_0^{-n}$ (понадобится $\frac{1}{3}N_0^3\asymp h_0^{-3n}$ арифметических операций); остальные действия осуществляются за $O(N)$ арифметических операций. Если положить $h_0\asymp h^{2/3}$, то число итераций k_* будет равномерно по h ограниченным и всего для решения системы (19) с точностью h^2 потребуется $O(h^{-2n})$ арифметических операций (вместо $O(h^{-3n})$ арифметических операций при прямом решении системы (19)). Может, однако, случится, что и $N_0\asymp N^{2/3}$ слишком велико для практических вычислений из-за трудностей применения матрицы $(I_{h_0}-T_{h_0})^{-1}$. В этом случае следует либо увеличить h_0, расплатившись за это увеличением числа итераций до $k_*\asymp|\ln h|/|\ln h_0|$, либо организовать при $h_0\asymp h^{2/3}$ еще один или несколько внутренних циклов итераций вполне аналогично тому, как мы применение $(I_h-T_h)^{-1}$ к p_hf заменили итерациями (21).

3. Элементы матрицы T_h имеют вид

$$t_{ijh}=\begin{cases}a_1(ih)\varkappa(|i-j|h)a_2(jh)w_{jh}, & i\neq j,\\ 0, & i=j\end{cases}\quad (ih,\ jh\in G),$$

где $\varkappa(r)=\ln r$ при $n=2$ и $\varkappa(r)=r^{-(n-2)}$ при $n\geqslant 3$. Умножение вектора (сеточной функции) на сеточные функции $a_1(ih)$ и $a_2(jh)w_{jh}$ занимает $2N\asymp h^{-n}$ умножений. Применение конволюционной матрицы $\varkappa(|i-j)h|)$ $(ih,\ jh\in G)$ к вектору можно осуществить при помощи многомерного быстрого преобразования Фурье (см. [6]), для этого потребуется $2^{n-1}nN\log_2 N\asymp h^{-n}|\ln h|$ арифметических действий. Положив $h_0=h^{1/3}$ (или $h<h_0<h^{1/3}$, если $h_0\asymp h^{1/3}$ слишком велико), число итераций k_* снова будет ограниченным, и система (19) решается с

точностью h^2 за $O(h^{-n}|\ln h|)$ арифметических действий. Таким образом, на вычисление одной компоненты решения u_h понадобится в среднем лишь $O(|\ln h|^{1/n})$ арифметических действий.

6. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для* $u_h \in E_h$, $v_h = T_h u_h \in E_h$ *справедливо неравенство*

$$|v_h(ih) - v_h(i'h)| \leqslant c\|u_h\| [d_G(ih, i'h)]^q \quad (ih,\ i'h \in G), \tag{24}$$

где постоянная с не зависит от h *и* u_h.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда ih и $i'h$ $(i \neq i')$ принадлежат одной компоненте связности множества G. Обозначим $\delta = 2d_G(ih, i'h)$ и построим ломаную $[z^1, z^2, \ldots, z^p] \subset G$ с вершинами в точках $ih = z^1, z^2, \ldots, z^p = i'h$, такую что $\sum_{k=1}^{p-1} |z^{k+1} - z^k| \leqslant \delta$.
Имеем

$$|v_h(ih) - v_h(i'h)| \leqslant \|u_h\| \Big\{ |K(ih, i'h)|\, \omega_{i'h} + |K(i'h, ih)|\, \omega_{ih} +$$
$$+ \sum_{\substack{jh \in G,\ j \neq i,\ j \neq i' \\ |j-i|h \leqslant 2\delta}} [|K(ih, jh)| + |K(i'h, jh)|]\, \omega_{jh} +$$
$$+ \sum_{\substack{jh \in G \\ |j-i|h > 2\delta}} |K(ih, jh) - K|\, (i'h, jh)|\, \omega_{jh} \Big\}.$$

Поскольку $\omega_{ih} \leqslant ch^n$ $(ih \in G)$, а $|K(ih, i'h)| \leqslant c(1 + |\ln h|)$ при $n=2$ и $|K(ih, i'h)| \leqslant ch^{-(n-2)}$ при $n \geqslant 3$, то $|K(ih, i'h)|\, \omega_{i'h} = o(h) = o(\delta)$. Далее,

$$\sum_{\substack{jh \in G,\ j \neq i,\ j \neq i' \\ |j-i|h \leqslant 2\delta}} [|K(ih, jh)| + |K(i'h, jh)|]\, \omega_{jh} \asymp$$
$$\asymp \int_{|y-ih| \leqslant 2\delta} [|K(ih, y)| + |K(i'h, y)|]\, dy = O(\delta^2).$$

С учетом (12) и (22)

$$|K(ih, jh) - K(i'h, jh)| \leqslant c_1 \delta^q |\varkappa(|ih - jh|)| +$$
$$+ c_2 |\varkappa(|ih - jh|) - \varkappa(|i'h - jh|)|.$$

При $|j-i|h > 2\delta$, $t \in [0,1]$ имеем $|jh - (tz^k + (1-t)z^{k+1})| \geqslant \geqslant \frac{1}{2}|jh - ih| \geqslant \delta$, поэтому

$$|\varkappa(|ih - jh|) - \varkappa(|i'h - jh|)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} |\varkappa(|z^k - jh|) - \varkappa(|z^{k+1} - jh)|)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n} \sum_{k=1}^{p-1} |z^k - z^{k+1}| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \varkappa'(|tz^k + (1-t)z^{k+1} - jh|) \leqslant c\delta |jh - ih|^{-(n-1)},$$

$$\sum_{\substack{jh \in G \\ |j-i|h > 2\delta}} |K(ih, jh) - K(i'h, jh)|\, \omega_{jh} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \delta^q \int_G |\varkappa(|ih - y|)\, dy + c_2 \delta \int_G |ih - y|^{-(n-1)} dy \leqslant c\delta^q.$$

Этим (24) установлено.

Лемма 2. *В условиях теоремы 2*

$$\|(I_h - p_{hh_0} p_{h_0 h})\, T_h\| \leqslant ch_0^q, \qquad \|(p_{h_0 h} T_h - T_{h_0} p_{h_0 h})\, T_h\| \leqslant ch_0^q. \tag{25}$$

Доказательство. Обозначим $v_h = T_h u_h$. Сеточная функция $p_{hh_0} p_{h_0 h} v_h$ принимает в узлах $ih \in G_{jh_0}$ значение $v_h(jh_0)$, поэтому с учетом (24)

$$|v_h(ih) - (p_{hh_0} p_{h_0 h} v_h)(ih)| = |v_h(ih) - v_h(jh_0)| \leqslant$$
$$\leqslant c\|u_h\| [d_G(ih, jh_0)]^q \leqslant c' \|u_h\| h_0^q,$$

откуда следует первое из неравенств (25). Для получения второго неравенства (25) учтем, что $\varpi_{jh_0} = \sum_{j'h \in G_{jh_0}} \varpi_{j'h}$; с учетом (22), (24) и рассуждений при доказательстве предыдущей леммы находим

$$\|(p_{h_0 h} T_h - T_{h_0} p_{h_0 h}) T_h u_h\| =$$
$$= \max_{ih_0 \in G} \left| \sum_{\substack{j'h \in G \\ j'h \neq ih_0}} K(ih_0, j'h) \varpi_{j'h} v_h(j'h) - \sum_{\substack{jh_0 \in G \\ j \neq i}} K(ih_0, jh_0) \varpi_{jh_0} v_h(jh_0) \right| =$$
$$= \max_{ih_0 \in G} \left| \sum_{\substack{jh_0 \in G \\ j \neq i}} \sum_{j'h \in G_{jh_0}} [K(ih_0, j'h) v_h(j'h) - K(ih_0, jh_0) v_h(jh_0)] \varpi_{j'h} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{j'h \in G_{ih_0} \\ j'h \neq ih_0}} K(ih_0, j'h) \varpi_{j'h} v_h(j'h) \right| \leqslant$$
$$\leqslant c' \max_{ih_0 \in G} \sum_{\substack{jh_0 \in G \\ j \neq i}} \sum_{j'h \in G_{jh_0}} [|v_h(j'h) - v_h(jh_0)| +$$
$$+ |a_2(j'h) - a_2(jh_0)| \|u_h\|] |\varkappa(|ih_0 - j'h|)| \varpi_{j'h} +$$
$$+ c' \max_{ih_0 \in G} \sum_{\substack{jh_0 \in G \\ j \neq i}} \sum_{j'h \in G_{jh_0}} |\varkappa(|ih_0 - j'h|) - \varkappa(|ih_0 - jh_0|)| \varpi_{j'h} \|u_h\| +$$
$$+ c' \max_{ih_0 \in G} \int_{G_{ih_0}} |\varkappa(|ih_0 - y|)| dy \|u_h\| \leqslant c h_0^q \|u_h\|, \quad \text{ч. и т. д.}$$

Лемма 3. *Определенный в* (21) *оператор* T_{h,h_0} *представим в виде*

$$T_{h,h_0} = (I_h - p_{hh_0} p_{h_0 h}) T_h + p_{hh_0} (I_{h_0} - T_{h_0})^{-1} (p_{h_0 h} T_h - T_{h_0} p_{h_0 h}) T_h. \quad (26)$$

Доказательство. Исходя из равенства

$$p_{hh_0} p_{h_0 h} = p_{hh_0} (I_{h_0} - T_{h_0})^{-1} (I_{h_0} - T_{h_0}) p_{h_0 h},$$

формула (26) после элементарных преобразований примет вид, указанный в (21).

Теперь из (26), (25) и устойчивости метода (см. раздел 4) немедленно получаем неравенство (23). При $\|T_{h,h_0}\| \leqslant c h_0^q < 1$ уравнение $u_h = T_{h,h_0} u_h + f_{h,h_0}$ имеет единственное решение $u_h \in E_h$. Очевидно, этому уравнению удовлетворяет решение u_h уравнения $u_h = T_h u_h + p_h f$ (т. е. решение системы уравнений (19)). Таким образом, итерационные приближения u_h^k стремятся при $k \to \infty$ к решению u_h системы (19). Доказательство теоремы 2 завершено.

7. Дискретизация задачи {(7), (8)}

Как уже отмечалось, решение внутренней-внешней задачи {(1), (2), (3′)} сводится к решению двух интегральных уравнений (9) и (10) с логарифмическим ядром, и к ним применимы результаты разделов 4—5. По объему вычислений можно, однако, предпочитать непосредственное решение задачи $\{(7), (8)\}$. Приведем соответствующие формулировки; доказательства аналогичны случаю интегрального уравнения без дополнительного условия.

На основе кубатурной формулы (14) построим дискретизацию задачи $\{(7), (8)\}$:

$$u_{ih}=\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{jh\in G\\ j\neq i}} a(ih)\ln(|i-j|h)\,w_{jh}u_{jh}+b_h a(ih)+f(ih)\quad (ih\in G),$$
$$\sum_{jh\in G} u_{jh}w_{jh}=0. \tag{27}$$

Из этой системы уравнений следует определить $u_h=(u_{ih})_{ih\in G}$ и скаляр b_h.

Теорема 3. *Пусть граница ∂G кусочно гладка, G удовлетворяет условию конуса, веса $w_{jh}=\operatorname{mes} G_{ih}$ кубатурной формулы подчинены условиям* (15)—(18). *Пусть $a, f\in C(G^*)\cap C^{2,1}(G)$, и пусть однородная задача, соответствующая задаче $\{(7), (8)\}$, имеет только нулевое решение. Тогда существует такое $h_*>0$, что при $0<h<h_*$ система уравнений* (27) *имеет единственное решение $u_h\in E_h$, $b_h\in \mathbf{C}$, и*

$$\max_{ih\in G}|u_{ih}-u(ih)|\leqslant ch^2(1+|\ln h|),\qquad |b_h-b|\leqslant ch^2(1+|\ln h|),$$

где $\{u, b\}$ — решение задачи $\{(7), (8)\}$, $u\in C(G^*)\cap C^{2,1}(G)$, $b\in\mathbf{C}$.

Запишем систему уравнений (27) в виде уравнения

$$\bar u_h=\bar T_h\bar u_h+\bar f_h$$

в пространстве $\bar E_h=E_h\times\mathbf{C}$, где

$$\bar u_h=\begin{pmatrix}u_h\\ b_h\end{pmatrix},\quad \bar T_h=\begin{pmatrix}T_h & a_h\\ J_h & 1\end{pmatrix},\quad \bar f_h=\begin{pmatrix}p_hf\\ 0\end{pmatrix}$$

$T_h\in L(E_h, E_h)$ — матрица с элементами

$$t_{ijh}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}a(ih)\ln(|i-j|h)\,w_{jh}, & i\neq j,\\ 0, & i=j\end{cases}\qquad (ih, jh\in G),$$

$a_h\in L(\mathbf{C}, E_h)$ — оператор умножения на сеточную функцию p_ha, $J_h\in L(E_h, \mathbf{C})$ — оператор, определенный равенством

$$J_hu_h=\sum_{jh\in G}u_h(jh)\,w_{jh},\quad u_h\in E_h.$$

Итерационный метод определим аналогично (21):

$$\bar u_h^{k+1}=\bar T_{h,h_0}\bar u_h^k+\bar f_{h,h_0}\quad (k=0, 1, \ldots), \tag{28}$$

где

$$\bar T_{h,h_0}=\bar T_h-\bar p_{hh_0}(\bar I_{h_0}-\bar T_{h_0})^{-1}\bar p_{h_0h}(\bar I_h-\bar T_h)\bar T_h\in L(\bar E_h, \bar E_h),$$
$$\bar f_{h,h_0}=\bar f_h+\bar p_{hh_0}(\bar I_{h_0}-\bar T_{h_0})^{-1}\bar p_{h_0h}\bar T_h\bar f_n\in\bar E_h,$$

$$\bar p_{hh_0}=\begin{pmatrix}p_{hh_0} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \bar p_{h_0h}=\begin{pmatrix}p_{h_0h} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \bar I_h=\begin{pmatrix}I_h & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Пусть G удовлетворяет условию конуса, функция $a\in BC(G)$ удовлетворяет условию Гельдера* (ср. (22)) *с показателем q $(0<q\leqslant 1)$ относительно метрики d_G. Однородная задача, соответствующая задаче $\{(7), (8)\}$, пусть имеет лишь нулевое решение. Пусть*

разбиения $\{G_{j'h} : j'h \in G\}$ *и* $\{G_{jh_0} : jh_0 \in G\}$ *подчинены условиям раздела* 5. *Тогда*

$$\|\bar{T}_{h,h_0}\|_{L(\bar{E}_h,\ \bar{E}_h)} \leqslant ch_0^q$$

и, следовательно, итерационный метод (28) *при* $ch_0^q < 1$ *сходится; пределом является решение* $\bar{u}_h$ *системы* (27).

На итерационный метод (28) дословно переносится анализ числа арифметических действий, проведенный в разделе 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Crouzeix M., Descloux J.* A bidimensional electromagnetic problem. Rennes, Univ. de Rennes, 1988.
2. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения в частных производных. М., Мир, 1966.
3. *Трибель X.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., Мир, 1980.
4. *Вайникко Г. М.* // Мат. сб., 1989, 180, № 12, 1709—1723.
5. *Вайникко Г., Педас А., Уба П.* Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. Тарту, Тартуск. ун-т, 1984.
6. *Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ. Киев, Наук. думка, 1986.

Тартуский университет

Поступила в редакцию 13/II 1990

Gennadi VAINIKKO

ÜHE SISE-VÄLISÜLESANDE INTEGRAALVÕRRANDID JA NENDE LIGIKAUDNE LAHENDAMINE

On antud sise-välisülesannete (1)—(3) ja {(1), (2), (3′)} formuleeringud integraalvõrrandite kujul. Näiteks $n=2$ korral avaldub φ kujul (6), kusjuures funktsioon u ja konstant b tuleb määrata ülesande {(7), (8)} lahendina. On konstrueeritud $O(h^2|\ln h|)$-täpsusega kvadratuurvalemite meetod tekkivate nõrgalt singulaarsete integraalvõrrandite (11) lahendamiseks, samuti interatsioonimeetod, mis võimaldab $O(h^{-n})$ tundmatuga süsteemi lahendada h^2-täpsusega $O(h^{-n}|\ln h|)$ aritmeetilise tehte abil.

Gennadi VAINIKKO

INTEGRAL EQUATIONS OF AN INTERIOR-EXTERIOR PROBLEM AND THEIR APPROXIMATE SOLUTION

Let $G \subset \mathbf{R}^n$ be an open bounded set, a and f given functions on $\bar{G}$. Consider the problem: find $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n) \cap W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ so that

$$\Delta\varphi(x) = a(x)\varphi(x) + f(x), \quad x \in G,$$

$$\Delta\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \backslash \bar{G},$$

whereby $\varphi(x)$ is bounded $(n=2)$ or $\varphi(x) \to 0$ $(n \geqslant 3)$ as $|x| \to \infty$. The integral equation reformulations of the problem are given. For example, in case $n=2$ we have $\varphi(x) = (2\pi)^{-1} \int_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy + b$, $x \in \mathbf{R}^2$, where function u and constant b must be determined as the solution to the problem

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} a(x) \int_G \ln|x-y|\,u(y)\,dy + ba(x) + f(x), \quad x \in G, \quad \int_G u(x)\,dx = 0.$$

A cubature formula method of accuracy $O(h^2|\ln h|)$ as well as an iteration method to solve the corresponding linear algebraic systems of equations are constructed. To determine $O(h^{-n})$ unknowns of the system with accuracy h^2 only $O(h^{-n}|\ln h|)$ arithmetical operations are needed.