Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1989, 38, № 3, 330—337
https://doi.org/10.3176/phys.math.1989.3.12
УДК 519.3 : 51 : 62—50

И. КЕЙС

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СУБОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО СИНТЕЗА В МЕТОДЕ ПРЯМОЙ ЛИНЕЙНОЙ АГРЕГАЦИИ

(Представил Ю. Яаксоо)

Предложено исследование динамики субоптимальных многомерных нестационарных систем, полученных на основе агрегации-декомпозиции [1–9]. Проведено исследование устойчивости решений и вопроса ограниченности значения субоптимального функционала в основном из рассматриваемых вариантов линейной агрегации. Предложена новая схема линейной агрегации с постоянными матрицами декомпозиции, обобщающая способы [1, 4, 7–9] на нелинейные системы.

Получены критерии ограниченности и асимптотической устойчивости субоптимальных движений, сходимости показателя субоптимальности, а также соответствующие верхние и нижние оценки на абсолютную норму переходной матрицы.

1. Постановка задачи

К числу актуальных самостоятельных направлений эффективного анализа и синтеза многомерных управляемых динамических систем, связанных с иерархическим подходом, принадлежат декомпозиция и агрегирование. Их основная идея состоит в замене сложной исходной задачи большой размерности n приближенной системой сравнения размерности $l \ll n$ (агрегация), либо m независимыми подсистемами соответственно размерности $l_\mu \ll n$, $\sum_{\mu=1}^{m} l_\mu = n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$ (декомпозиция). Целью применения операций декомпозиции и агрегации является учет ограниченности оперативной памяти ЭВМ и приемлемого времени счета, а также неполноты обратной связи. Операции декомпозиции и агрегации являются геометрическими преобразованиями, содержащими векторный/матричный параметр, постоянный или переменный по времени t, которые вводят l_μ-мерные векторы z_μ в декомпозиции, l-мерный вектор z в агрегировании и (или) управления, зависящие лишь от времени t и соответственно от векторов z_μ, z. После преобразования r-мерной исходной модели с критерием оптимальности процесса находим l-мерную агрегированную систему сравнения с ее оптимизирующим (агрегированным) функционалом, причем как модель, так и функционал содержит параметры агрегации, и находим оптимальное (генерирующее) управление агрегированной системы, зависящее от параметров агрегации. Последние определяются из условий минимизации по параметрам агрегации функционала субоптимальности соответствующего исходному функциональному критерию, либо оценивающего заданную невязку для поиска субоптимального управления. Аналогичная двухуровневая субоптимизация используется в синтезе управлений сложных многомерных динамических систем на основе декомпозиции [1–3]. В способе прямой линейной агрегации-декомпозиции рассмотрена задача управления линейной многомерной системой [4–6]

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u, \quad \dim x=n\geqslant r=\dim u=r_B\equiv\operatorname{rank} B \tag{1.1}$$

с квадратичным функционалом оптимальности

$$2J=x_1^{\mathrm{T}}P_1x_1+\int_{t_0}^{t_1}[x^{\mathrm{T}}Q(t)x+u^{\mathrm{T}}R(t)u]\,\mathrm{d}t\to\min=2J^0(t_0,x_0) \tag{1.2}$$

и фиксированными $t_0<t_1\leqslant\infty$, $x_0\equiv x[t_0]$, где x, u — соответственно векторы состояния и управления, $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $P(t)\subset C^{(0)}[\mathfrak{T}]$ — непрерывные на $\mathfrak{T}\equiv[t_0,t_1]$ матрицы нужного порядка, причем

$$P_1^{\mathrm{T}}=P_1=P(t_1)=\mathrm{const}\geqslant 0, \quad Q^{\mathrm{T}}=Q\geqslant 0, \quad R^{\mathrm{T}}=R>0, \quad t\in\mathfrak{T}. \tag{1.3}$$

Задача (1.1), (1.2) при (1.3) имеет x-линейный единственный оптимальный регулятор $u^0(t,x)$ вида

$$u^0=K^0(t)x, \quad K^0\equiv-R^{-1}B^{\mathrm{T}}M; \quad 2J^0(t_0,x_0)=x_0^{\mathrm{T}}M_0x_0, \tag{1.4}$$

где $M=M(t)$ — решение $(n\times n)$-мерного матричного уравнения

$$\dot{M}=MBR^{-1}B^{\mathrm{T}}M-A^{\mathrm{T}}M-MA-Q, \quad M(t_1)=P_1\geqslant 0, \quad M_0\equiv M(t_0). \tag{1.5}$$

Аналогично отмеченному ранее общему декомпозиционно-агрегационному подходу для сложных нелинейных систем в простом способе [4–6] прямой линейной агрегации задачи линейно-квадратичного синтеза (1.1)—(1.5) учитываются ситуация измерения лишь сигнала обратной связи $z=C(t)x$, где C — $(l\times n)$ — матрица агрегации, а также трудность реализации решения (1.5) ввиду больших требований ко времени, объему памяти и вычислений на ЭВМ. В нем вместо закона (1.4) используются субоптимальные регуляторы

$$\bar{u}=\tilde{K}x=\bar{K}z=\bar{K}Cx, \quad \tilde{K}\equiv\bar{K}C; \quad C,\bar{K}\in C^{\circ}[\mathfrak{T}], \tag{1.6}$$

где $\tilde{K}$, $\bar{K}$, C — соответственно матрицы эффективности, усиления и агрегации. В [4–6] найдены матрицы $\tilde{K}_i$, $\bar{K}_i$, C_i, задающие субоптимальный регулятор (1.6) $\bar{u}_i$, определенный условием минимальности одного из четырех критериев субоптимальности I_i, $1\leqslant i\leqslant 4$ геометрического и «вероятностного» типа для показателя (1.2).

Здесь $I_1\equiv\|\tilde{K}-K^0\|_{(a)}$ — абсолютная норма (Гильберта) невязки $\tilde{K}-K^0$, оценивающая среднеквадратичную ошибку

$$\|\bar{u}-u^0\|^2_{(2)}<I_1^2\|x\|^2_{(2)},$$

$I_2\equiv\operatorname{tr}L_0$ — «математическое ожидание» значения (1.2) на $\bar{u}$: $2J[\bar{u}]=x_0^{\mathrm{T}}L_0x_0$, если $x_0=x[t_0]$ трактуется как случайная переменная, равномерно распределенная на единичной сфере [1, 8]; $I_3\equiv\det L_0$ — объемный (среднегеометрический) показатель типа меры Лиувилля $L=L[t,t_1,P_1;\bar{K},C]$, $L(t_1)=P_1$, $L_0=L(t_0)>0$ $I_4\equiv J[t_0,x_0,\bar{u}]$ — фазовый показатель (в фиксированной $(t_0,x_0)\Rightarrow\bar{u}(t_0,x_0)$).

При этом требуется интегрирование (1.5) или аналогичных $(n\times n)$-мерных линейно-квадратичных уравнений на L (с рангом квадратичности не большим l) для I_2, I_3, I_4, но значения $M[t]$ или $L_j[t]$, $2\leqslant j\leqslant 4$ не надо сохранять в памяти ЭВМ. В поиске $\bar{u}_i=\tilde{K}_ix=\bar{K}_iC_ix$ не используются множители Лагранжа, что упрощает и стабилизирует процесс синтеза $\bar{u}_i$ на $\mathfrak{T}(1\leqslant i\leqslant 4)$. Все найденные в [4–6] субоптимальные по I_i регуляторы $\bar{u}_i=\tilde{K}_ix$ удовлетворяют соответственно модифицированному принципу проектирования Аоки—Ульма [4, 7]. При этом эффективные матрицы имеют вид:

$$\tilde{K}_j=N_j\mathfrak{F}_jN_j^{-1}\tilde{K}(L_j), \quad L_j=L, \quad 2\leqslant j\leqslant 4; \quad \tilde{K}_1\equiv K\equiv\mathfrak{F}K^0, \tag{1.7}$$

где
$$-\dot{L}=L\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}L+\tilde{Q}, \quad L(t_1)=P_1\geqslant 0, \quad \tilde{A}\equiv A+B\tilde{K}, \tag{1.8}$$

$$\tilde{Q} \equiv Q + \bar{K}^{\mathrm{T}} R \bar{K}, \quad L(t) = \Phi^{\mathrm{T}} P_1 \Phi + \int_t^{t_1} \Phi^{\mathrm{T}} \tilde{Q} \Phi \, d\tau, \quad L = L_i, \tag{1.9}$$

$\Phi \equiv \Phi(\tau, t)$ — переходная матрица линейной системы

$$d\Phi/d\tau = \tilde{A}(\tau)\Phi, \quad \Phi(\tau, s) = \Phi(\tau, t)\Phi(t, s), \quad \Phi(\tau, \tau) = I_{nn}. \tag{1.10}$$

Перестановочная с $H^0 \equiv K^0 K^{0\mathrm{T}} > 0$ $(r \times r)$-матрица $\mathfrak{T}$ проектирования в l-мерную плоскость $\mathfrak{L}$ r-мерного пространства; $\mathfrak{T}_j$ — $(r \times r)$-матрицы проекторов ранга l, матрицы $\bar{K}(L_j)$ и $N_j = N_j(L_j)$ — соответственно линейные и нелинейные алгебраические матричные функции L_j, параметров системы (1.1), (1.2) и показателей I_j, значения которых приводятся в [5, 6].

В [5, 6] получены простые и явные алгебраические представления не только субоптимальных эффективных матриц $\bar{K}_i$, усиления $\bar{K}_i$, но и наилучших по I_i матриц сигнала (агрегации) C_i, которые обычно рассматриваются заданными и постоянными.

З а м е ч а н и е 1. В исследовании и приложениях динамики (1.1), (1.2) для нелинейной при $j \geqslant 2$ системы (1.6)—(1.10) можно использовать метод линеаризации Ньютона—Рафсона—Канторовича [10]. При достаточной малости $\|L_j - M\|$ на $\mathcal{T}$ исследование нелинейных вариантов субоптимизации (1.7) в первом приближении можно заменить рассмотрением варианта $\bar{K}_1 = K$ — их простейшего линейного типа.

В этой связи для нелинейных оптимизируемых систем управления

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad J[u] = \varphi[t_1, x_1] + \int_{t_0}^{t_1} f_0[\tau, x(\tau), u(\tau)] d\tau, \tag{1.11}$$

$$\dim x = n \gg 1, \quad \dim u = r; \quad f_0, f, \varphi \subset C^{(1)} [\mathcal{T} \times X \times U]$$

при замере лишь m векторов $y_i = C_i x$, $\dim y_i = l_i$, $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$, где C_i-матрица постоянная на $\mathcal{T}$ размера $(l_i \times n)$, $2 \leqslant i \leqslant m$, $0 \neq \neq \det [C_1^{\mathrm{T}}, \ldots, C_m^{\mathrm{T}}]$, введем следующее обобщение схемы агрегации-декомпозиции, предложенной лишь для линейных систем (1.1), (1.2) в [1, 8, 9]. Трехэтапную двухуровневую декомпозицию-агрегацию зададим системами сравнения

$$\dot{z}_i = C_i f(t, C_i^+ z_i, u^{(i)}), \quad J_i = \varphi(t_1, C_i^+ z_{i1}) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(\tau, C_i^+ z_i, u^{(i)}) d\tau, \tag{1.12}$$

$$z_{i0} \equiv y_{i0} = C_i x_0; \quad x \to x_i^+ = C_i^+ z_i, \quad y_i \to z_i; \quad J_i \to \min_{u^{(i)}},$$

$$\tilde{u}^{(i)}(t, z_i, C_i) \equiv \operatorname{Arg} \min_{u^{(i)}} J_i, \quad \hat{u}^{(i)} \equiv \tilde{u}^{(i)} \big|_{z_i \to y_i = C_i x},$$

где x_i^+ — нормальное решение: $x_i^+ = C_i^+ z_i$, $C_i x_i = z_i$, $\|x_i^+\| \leqslant \|x_i\|$, $\|C_i x_i^+ - z_i\| \leqslant \|C_i x_i - z_i\|$, а C_i^+-псевдообратная к C_i матрица $(n \times l_i)$, определенная равенствами [1, 11]

$$[C_1^+, C_2^+, \ldots, C_m^+] = \check{C}^{-1}, \quad \check{C}^{-1}\check{C} = I_{nn}, \quad \check{C}^{\mathrm{T}} \equiv [C_1^{\mathrm{T}}, \ldots, C_m^{\mathrm{T}}], \tag{1.13}$$

$$C_i C_i^+ C_i = C_i, \quad \sum_{i=1}^{m} C_i^+ C_i = I_{nn}; \quad C_i C_j^+ = \begin{cases} 0, & i \neq j, \ 1 \leqslant i, \ j \leqslant m \\ I_{l_i l_i}, & i = j \end{cases}.$$

Выберем приближенный (генерирующий) регулятор $\hat{u}$ аддитивно

$$\hat{u} \equiv \hat{u}(t, x, \check{C}) = \sum_{i=1}^{m} \hat{u}^{(i)}(t, C_i x, C_i). \tag{1.14}$$

Тогда субоптимальный регулятор $\bar{u}$ системы (1.11) получим из равенства (1.14), подставляя в нем матрицы агрегации-декомпозиции $C_i \equiv \equiv C_{i\,\mathrm{opt}}$, минимизирующие заданный критерий $I[\bar{C}]$ при фиксированных t_0, t_1, x_0 и связях (1.11)—(1.13). Необходимые условия первого порядка на оптимальные $C_{i\,\mathrm{opt}}$ дает обращение в нуль всех частных по C_i градиентов: $\mathrm{grad}_{C_i} I = 0$. Ввиду сложности этих равенств в общем нелинейном случае (1.11), (1.12) можно использовать для поиска $C_{i\,\mathrm{opt}}$ метод градиентов аналогично [1, 8].

Замечание 2. Аналогично (1.7) в исследовании стабилизации $x \equiv 0$ системы (1.11), (1.12) по первому приближению используется линейная часть Kx субоптимального регулятора $\bar{u}(t, x, C_{\mathrm{opt}})$ (1.14).

Учитывая замечания 1 и 2, рассмотрим необходимые для практической реализации (1.6) вопросы устойчивости $x \equiv 0$, оценки решений (1.1) и функционала (1.2) на бесконечном полуинтервале $\mathfrak{T}(t_1 = \infty)$. Ограничимся основным вариантом $\bar{K}_1$ (1.7) в (1.6) (субоптимальным по I_1) для задач построения субоптимальных управлений систем (1.1), (1.2), (1.11), (1.12) методами линейной агрегации-декомпозиции.

2. Условия ограниченности и устойчивости I_1-субоптимальных решений системы (1.1), (1.2), (1.6), (1.7)

Установим, когда ограничены решения $x[t]$, асимптотически устойчиво $x \equiv 0$, а $y[\bar{u}](t_1 = \infty)$ сходится.

Для рассматриваемой системы имеем.

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x,\ x[t] = F[t]x_0;\quad \dot{F}[t] = \tilde{A}(t)F[t],\ F[0] = I_{nn}, \tag{2.1}$$

$$2J[\bar{u}] = x_0^{\mathrm{T}} L_0 x_0,\quad L_0 \equiv L[t, t_1, P_1 | K]\,|_{t=t_0},$$

$$-\dot{L} = L\tilde{A}(t) + \tilde{A}^{\mathrm{T}}(t)L + \tilde{Q}(t),\quad L_1 = L(t_1) = P_1 \geqslant 0,$$

$$L[t, t_1, P_1 | K] = \Phi(t_1, t)P_1\Phi(t_1, t) + \int_t^{t_1} \Phi^{\mathrm{T}}(\tau, t)\tilde{Q}(\tau)\Phi(\tau, t)\,d\tau,$$

$$L(t) > 0,\quad L_0 \equiv L(t_0) > 0,\quad \forall t \in \mathfrak{T};\quad \Phi(\tau, t) = F(\tau)F^{-1}(t),$$

где $$\tilde{A} \equiv A + BK,\quad \tilde{Q} \equiv Q + K^{\mathrm{T}}RK,\quad K \equiv \mathfrak{I}K^0 \in C^0[\mathfrak{T}], \tag{2.2}$$

$$K^0 \equiv -R^{-1}B^{\mathrm{T}}M,\quad \mathfrak{I}H^0 \equiv H^0\mathfrak{I},\quad H^{0\mathrm{T}} \equiv H^0 \equiv K^0K^{0\mathrm{T}} > 0,$$

$$H^0 = \Omega_r \operatorname{diag}(k_1^2, \ldots, k_r^2)\Omega_r^{\mathrm{T}},\quad 0 < k_i^2 \leqslant k_{i+1}^2,\quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

$\forall k_i^2 \in \lambda(H^0)$ спектру H^0, $k_i^2 = \lambda_i(H^0)$, Ω_r — ортогональная: $\Omega_r\Omega_r^{\mathrm{T}} = I_{rr}$

$$\mathfrak{I} = \Omega_r \operatorname{diag}(1_1, \ldots, 1_l, 0_1, \ldots, 0_\rho)\Omega_r^{\mathrm{T}},\quad r\mathfrak{I} = \operatorname{rank}\mathfrak{I} = l,\quad \varrho = r - l > 0,$$

обозначения A, B, R, P_1, M имеют смысл (1.1)—(1.5). Решения (2.1) ограничены, а $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво лишь при выполнении соответствующих им условий [12]

$$\sup_{t \geqslant 0} \|F[t]\| < +\infty;\quad \overline{\lim}\,\|F[t]\| = 0,\quad t \to +\infty. \tag{2.3}$$

Введем характеристику $\|F\|^2_{(a)}$ устойчивости (2.1) в виде квадрата абсолютной нормы F, равную следу ее матрицы V Грама и удовлетворяющую по (2.1), (2.2) равенствам

$$v \equiv \operatorname{tr} V,\ v(0) = n;\ V^{\mathrm{T}} = V = FF^{\mathrm{T}} > 0,\ V = \Omega_r \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)\Omega_n^{\mathrm{T}}, \tag{2.4}$$

$$\dot{V} = \tilde{A}V + V\tilde{A}^{\mathrm{T}},\quad V[0] = I_{nn};\quad \dot{v} = \sigma \equiv \operatorname{tr}[v\tilde{\Omega}_r^{\mathrm{T}}\bar{\alpha}\tilde{\Omega}_n],$$

где $\bar{\bar{v}}\equiv\operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n),\quad 0<v_1\leqslant v_2\leqslant\ldots\leqslant v_n,\quad v_j\in\lambda(V),$

$$\bar{\alpha}\equiv\operatorname{diag}(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n),\quad \hat{\alpha}_i=\operatorname{Re}\hat{\alpha}_i,\quad \hat{\alpha}_i\leqslant\hat{\alpha}_{i+1},\quad \hat{\alpha}_i\in\lambda(\hat{A}),$$

$$\hat{A}\equiv\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}=\hat{A}^{\mathrm{T}}=\hat{\Omega}_n\bar{\alpha}\hat{\Omega}^{\mathrm{T}}_n,\quad \tilde{\Omega}_n\equiv\Omega_n\hat{\Omega}^{\mathrm{T}}_n,\quad \tilde{\Omega}_n\tilde{\Omega}^{\mathrm{T}}_n=I_{nn},$$

$$\sigma\equiv\sigma(\bar{v}, \bar{\alpha}; \tilde{\Omega}_n)\equiv\operatorname{tr}[V\hat{A}]\equiv\operatorname{tr}[\bar{v}\tilde{\Omega}^{\mathrm{T}}_n\bar{\alpha}\tilde{\Omega}_n];\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n.$$

Экстремумы $\dot{v}\equiv\sigma$ на $\{\tilde{\Omega}_n\}$ устанавливает следующая

Лемма 1. *Если $V=V^{\mathrm{T}}>0$, $\hat{A}^{\mathrm{T}}=\hat{A}$ — действительные матрицы, то*

$$\min_{\tilde{\Omega}_n}\sigma\equiv\hat{\sigma}_1=\hat{\alpha}_1v_n+\ldots+\hat{\alpha}_nv_1\geqslant\sigma_1\equiv\hat{\alpha}_mv, \tag{2.5}$$

$$\max_{\tilde{\Omega}_n}\sigma\equiv\hat{\sigma}_2=\hat{\alpha}_1v_1+\ldots+\hat{\alpha}_nv_n\leqslant\sigma_2\equiv\hat{\alpha}_Mv. \tag{2.6}$$

Здесь и ниже $\tilde{\Omega}_n$ — любая ортогональная матрица (2.4), v — след V, $\hat{\alpha}_1\equiv\hat{\alpha}_m(t)$ — минимальное, $\hat{\alpha}_n\equiv\hat{\alpha}_M(t)$ — максимальное собственное число матрицы $\hat{A}$ (2.4).

Действительно, вариация $\bar{\bar{\sigma}}$ представима через вариацию $\delta\Omega_n{}^0$ экстремальной $\Omega_n{}^0$ матрицы в виде

$$\delta\sigma=\varepsilon\operatorname{tr}\{[(\tilde{\Omega}^0_n\bar{v}\tilde{\Omega}^{0\mathrm{T}}_n)\bar{\alpha}-\bar{\alpha}(\tilde{\Omega}^0_n\bar{v}\tilde{\Omega}^{0\mathrm{T}}_n)]\Gamma_{nn}\},\quad \delta\tilde{\Omega}^0_n=\Gamma_{nn}\tilde{\Omega}^0_n,$$

где $-\Gamma^{\mathrm{T}}_{nn}=\Gamma_{nn}$ — произвольная кососимметричная матрица. Из равенства нулю на $\tilde{\Omega}_n{}^0$ градиента σ

$$\operatorname{grad}_{\tilde{\Omega}^0_n}\sigma=\bar{\alpha}\bar{W}-\bar{W}\bar{\alpha}=0;\quad \bar{W}\equiv\tilde{\Omega}^0_n\bar{v}\tilde{\Omega}^{0\mathrm{T}}_n$$

следует перестановочность матриц $\bar{\alpha}$, $\bar{W}$ и их одновременная [13] диагонализация, когда все экстремальные значения $\sigma=\sum_{i=1}^{n}\hat{\alpha}_iv_{ji}$, где $V>0$ не использовалось. Последнее равенство (при $V>0$) доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Абсолютная норма F удовлетворяет оценкам*

$$v^{1/2}(\tau)\exp I_m\equiv v^{1/2}_{(1)}\leqslant v^{1/2}(t,\tau;\,v(\tau))\leqslant v^{1/2}_{(2)}\equiv v^{1/2}(\tau)\exp I_M, \tag{2.7}$$

$$I_m\equiv I_m(t,\tau;\,\tilde{\alpha}_m)=\int_\tau^t\tilde{\alpha}_m(s)\,ds;\quad I_M\equiv\int_\tau^t\tilde{\alpha}_M(s)\,ds, \tag{2.8}$$

$$\tilde{\alpha}_m(s)\equiv\hat{\alpha}_m(s)/2;\quad \tilde{\alpha}_M(s)\equiv\hat{\alpha}_M(s)/2;\quad \tilde{\alpha}_m=\min\lambda\left(\frac{\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right), \tag{2.9}$$

$$v^{1/2}(0)=n^{1/2},\quad \tilde{\alpha}_M=\max\lambda\left(\frac{\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right).$$

Доказательство. Из леммы 1 получаем неравенства

$$\hat{\alpha}_mv\leqslant\dot{v}\leqslant\hat{\alpha}_Mv;\quad v(0)=n,\quad v[t]>0,\quad t<+\infty.$$

Интегрируя их с учетом обозначений (2.4)—(2.6), (2.8), (2.9), найдем неравенства (2.7). Из леммы 2 и соотношений (2.3) получаем критерии ограниченности решений (2.1) и, соответственно, асимптотической устойчивости $x\equiv0$ в виде условий сходимости интегралов (2.8)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, I_M(t,0;\cdot)<\infty; \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, I_M(t,0;\cdot)=-\infty. \tag{2.10}$$

Экстремальные собственные числа $\tilde{\alpha}_m(s)$, $\tilde{\alpha}_M(s)$ (2.9) задачи минимизации I_1 определены матрицей $\tilde{A}$ (2.2), причем $\tilde{A}\leqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}\leqslant 0$. Из (2.2) и неравенств

$$\lambda_M(\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}})\leqslant\lambda_M(A+A^{\mathrm{T}})+\lambda_M(BK+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}), \tag{2.11}$$

$$\tilde{\alpha}_M\equiv 1/2\lambda_M(\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}})\leqslant\alpha_M\equiv 1/2\lambda_M(A+A^{\mathrm{T}});\quad \lambda_M(BK+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})=0$$

заменой $\tilde{\alpha}_M$ на α_M в (2.10) получим независимые от B, R, M грубые условия устойчивости. Выполнение последнего равенства в (2.11) следует из условий Сильвестра и соотношений

$$K^0SK^{0\mathrm{T}}=K^0BH^0\mathfrak{T}+\mathfrak{T}H^0B^{\mathrm{T}}K^{0\mathrm{T}}=-[H^{(1)}(B^{\mathrm{T}}MB)R^{-1}+$$
$$+R^{-1}(B^{\mathrm{T}}MB)H^{(1)}]\leqslant 0\Leftrightarrow S\leqslant 0\Leftrightarrow R^{-1}(B^{\mathrm{T}}MB)\leqslant 0,$$

где $S\equiv B\mathfrak{T}K^0+K^{0\mathrm{T}}\mathfrak{T}B^{\mathrm{T}}$, $H^{(1)}=H^{(1)\mathrm{T}}\equiv(K^0K^{0\mathrm{T}})\mathfrak{T}\geqslant 0$,

$$l\leqslant\operatorname{rank}S\leqslant\min(2l,n),\quad r-l\equiv\varrho>0.$$

В общем случае $|\tilde{\alpha}_M|\leqslant\min\limits_{(\alpha)}\|(\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}})/2\|_{(\alpha)}$. Более точные, но сложные оценки сверху для $\tilde{\alpha}_M$ и снизу для $\tilde{\alpha}_m$ дают, в частности, результаты Фробениуса, Брауна, Фарнелла, Паркера и Като [13, 14].

Ограниченность и оценка функционала $J[\bar{u}]$ (2.1)

Введем матрицу W обратную V и обозначения

$$W[t]=W^{\mathrm{T}}[t]\equiv[F[t]F^{\mathrm{T}}[t]]^{-1};\quad w[t]\equiv\operatorname{tr}W[t]>0, \tag{2.12}$$
$$-\dot{W}=\tilde{A}^{\mathrm{T}}W+W\tilde{A},\quad W[0]=I_{nn};\quad W[t]>0,\quad t\in\mathfrak{T},$$
$$P_1\equiv\operatorname{tr}P_1\geqslant 0,\quad \tilde{q}[t]\equiv\operatorname{tr}\tilde{Q}[t]\geqslant 0,\quad W\equiv V^{-1}.$$

При $\forall P_{(k)}:P_{(k)}\geqslant 0$, $P_{(k)}=P^{\mathrm{T}}_{(k)}$, $k\in R^{(1)}$ число $\|P_{(k)}\|_{(\tau)}\equiv|\operatorname{tr}P_{(k)}|$ будет нормой матрицы $P_{(k)}$, где $\operatorname{tr}[P_{(k)}P_{(s)}]<(\operatorname{tr}P_{(k)})(\operatorname{tr}P_{(s)})$ для $P_{(k)}, P_{(s)}>0$, $s\in R^{(1)}$, $n>1$. Учитывая обозначения (2.8), (2.12) из леммы 1 найдем для следа $V^{-1}=w$ оценки

$$w_1(t,\tau,w(\tau);\tilde{\alpha}_M)\leqslant w(t,\tau,w(\tau),\cdot)\leqslant w_2(t,\tau,w(\tau);\tilde{\alpha}_m),\quad t\in\mathfrak{T}, \tag{2.13}$$

$$w_1\equiv w(\tau)\exp[-2I_M(t,\tau;\tilde{\alpha}_M)],\quad w_2\equiv w(\tau)\exp[-2I_m(t,\tau;\tilde{\alpha}_m)],\quad \tau\leqslant t.$$

Оценку сверху субоптимального функционала $J[\bar{u}]$ получим из (2.1), (2.7), (2.8), (2.12), (2.13) и неравенств

$$J[t_0,x_0|\bar{u}]\leqslant 1/2(x_0^{\mathrm{T}}x_0)\operatorname{tr}L[t_0,\cdot];\quad \|L[t,t_1,P_1|K]\|_{(\tau)}< \tag{2.14}$$
$$<\|P_1\|_{(\tau)}\|\Phi^{\mathrm{T}}(t_1,t)\Phi(t_1,t)\|_{(\tau)}+\int_t^{t_1}\|\tilde{Q}(s)\|_{(\tau)}\|\Phi^{\mathrm{T}}(s,t)\Phi(s,t)\|_{(\tau)}ds\leqslant$$
$$\leqslant p_1w(t)v(t_1)+\int_t^{t_1}w(t)v(\tau)\tilde{q}(\tau)d\tau\leqslant w_2(t)\left[p_1v_2(t_1)+\int_t^{t_1}v_2(\tau)\tilde{q}(\tau)d\tau\right],$$
$$0\leqslant q(s)\equiv\operatorname{tr}Q(s),\quad r(s)\equiv\operatorname{tr}R(s)>0.$$

Из (2.14) следует, что $J[\bar{u}]$ сходится при $\forall t\in\mathfrak{T}$, $t_1=+\infty$, $p_1>0$, если выполнено первое условие (2.10) и сходится интеграл $J_{(2)}$

$$J_{(2)} \equiv \int_0^\infty v_2(s)\tilde{q}(s)\,ds; \quad \tilde{q}(s) \equiv \operatorname{tr}[Q(s) + \mathfrak{T}H^0(s)R(s)] < q(s) + \sum_{\lambda=1}^{e} k_\lambda^2(s)r(s), \tag{2.15}$$

где значения Q, $\mathfrak{T}$, H^0, k_i^2, v_2 даны в (2.2), (2.7), (2.8), (2.13).

Из (2.7), (2.13) для любой (α)-нормы $\|x[t]\|_{(\alpha)}$, $t \in \mathfrak{T}$ легко получить оценки, аналогичные [2, 15]

$$\|x[t]\|_{(\alpha)} \geqslant \|x(0)\|_{(\alpha)} n^{-1/2} c_{(\alpha)}^{-1}(n) \exp \int_0^t \lambda_m[(\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}})/2]\,ds, \tag{2.16}$$

$$\|x[t]\|_{(\alpha)} \leqslant \|x(0)\|_{(\alpha)} n^{1/2} c_{(\alpha)}(n) \exp \int_0^t \lambda_M[(\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}})/2]\,ds, \tag{2.17}$$

где $0 < c_{(\alpha)}(n)$ — постоянная, независящая от матрицы $F[t]$ в неравенствах [11] на (a)-, (α)-нормы

$$c'_{(\alpha)}(n)\|F\|_{(a)} \leqslant \|F\|_{(\alpha)} \leqslant c''_{(\alpha)}(n)\|F\|_{(a)}; \quad c''_{(\alpha)}(n) \equiv c_{(\alpha)}(n), \quad c'_{(\alpha)}(n) > 0.$$

Для используемой в выводе (2.16), (2.17) $\|F\|_{(\alpha)}$ нельзя задать подчиненную абсолютной норме F $\nu(x)$-норму вектора $x \in R^n$. В частности, неточно утверждение, что $\exists x_0$, $y \in R^n$ такие, когда

$$x_0 \neq 0, \quad \nu^0(Fx_0) = \|F\|_{(a)}\nu^0(x_0), \quad \text{где} \quad \nu^0 \equiv \|xy^{\mathrm{T}}\|_{(a)}, \quad y \neq 0.$$

В выводе оценок (2.16), (2.17) здесь не требуется эквивалентность соответствующих дискретных и непрерывных систем (2.1) и не используется вариация в $I_{nn} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ нормы (α)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{\varepsilon^{-1}[\|I_{nn} + \varepsilon F\|_{(\alpha)} - \|I_{nn}\|_{(\alpha)}\},$$

неточно называемая в литературе [2] ее логарифмической производной.

Здесь применение второго метода Ляпунова в получении критериев (2.8)—(2.10), двухсторонних оценок (2.7) движения нестационарной системы (2.1), (2.2) и оценок (2.14), (2.15) функционала (1.2) при субоптимальном регуляторе (1.7) заменено использованием дифференциальных неравенств на параметры v (2.4), w (2.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ульм С. Ю.* Методы декомпозиции для решения задач оптимизации. Таллин, Валгус, 1979.
2. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М., Наука, 1985.
3. *Цурков В. И.* Динамические задачи большой размерности. М., Наука, 1988.
4. *Ульм С. Ю.* // Автоматика и телемеханика, 1972. **5**, 27—32.
5. *Кейс И.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1986, **35**, № 3, 263—270.
6. *Кейс И.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1989, **38**, № 2, 172—179.
7. *Aoki, M.* Optimization Methods for Large-Scale Systems. 5 Aggregation. New York, Mc Graw Hill Book Company, 1971, 191—232.
8. *Kleinman, D. L., Athans, M.* // IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, **13**, 150.
9. *Meditch, Y. S.* // IEEE Trans. Automat. Contr., 1966, **11**, 433.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., Наука, 1978.
11. *Lancaster, P.* Theory of Matrices. New York, London, Academic Press, 1969, 185—233.
12. *Director, S. W., Rohrer, R. A.* Introduction to Systems Theory. New York, Mc Graw Hill Book Company, 1972.
13. *Bellman, R.* Instroduction to Matrix Analysis. New York, Mc Graw Hill Book Company, 1960, 65—67, 151—155, 171—173.
14. *Kato, T.* // J. Phys. Soc. Japan, 1949, **4**, 334—339.
15. *Лозинский С. М.* // Изв. вузов. Матем., 1958, № 5, 52—90.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/VII 1988

I. KEIS

OTSESE LINEAARSE AGREGEERIMISMEETODI LINEAAR-RUUTSÜNTEESI ÜLESANDE SUBOPTIMAALSE LAHENDI STABIILSUSTINGIMUSED

On uuritud otsese lineaarse agregeerimis-dekomponeerimismeetodi variantide (1.6), (1.7) põhilahendite (2.1), (2.2) stabiilsust ja suboptimaalse funktsionaali (1.2) väärtuste tõkestatust ning esitatud lineaarse agregeerimise-dekomponeerimise originaalne skeem (1.12)—(1.14), arvestades konstantseid dekompositsioonimaatrikseid ja üldistades mittelineaarsete mitmemõõtmeliste dünaamiliste süsteemide suboptimeerimisvõtteid [7-9]. On leitud suboptimaalsete liikumiste (2.1), (2.2) tõkestatuse ja asümptootilise stabiilsuse kriteeriumid (2.8)—(2.10), suboptimaalse funktsionaali (1.2), (2.1) koonduvuse kriteeriumid (2.11), (2.15) ning vastavad ülemised ja alumised hinnangud (2.7), (2.16), (2.17) üleminekumaatriksi ja olekuvektori absoluutse normi kohta.

I. KEIS

ON THE STABILITY PROPERTIES OF THE SUBOPTIMAL SOLUTION FOR THE LINEAR-QUADRATIC SYNTHESIS VIA DIRECT LINEAR AGGREGATION METHOD

The stability problem of the large-scale linear dynamic system (1.1), (1.2) governed by suboptimal control (1.7) in Hilbert performance criterion I_1, is investigated in the paper.

As a result, the convergence criterion (2.14), (2.15) for the suboptimal value of the functional (1.2) is obtained.

Relevant Lagrange stability conditions (2.10), (2.11) together with the asymptotic stability of the trivial solution (1.1) are established in the form of the Upper and Lower Bounds (2.7).

As by-product of the paper, the new Aggregation-Decomposition algorithm with constant Decomposition matrices is provided in (1.12)—(1.14), thus spreading the Meditch-Ulm's results from the large-scale linear systems to the nonlinear controllable systems.