Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1989, 38, № 3, 257—262

УДК 517.968.21; 528.85

Р. РЫЫМ

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представил Я. Эйнасто)

1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода с разностным ядром

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-x')\,u(x')\,dx'=v(x), \quad x\in(-\infty,\infty) \tag{1}$$

или, более кратко,

$$Ku=v. \tag{1a}$$

Функция v известна, требуется определить u. Ядро $k(x)$ предполагается неотрицательным и нормированным к единице

$$k(x)\geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,dx=1. \tag{2}$$

Задача (1) часто возникает при дистанционном зондировании атмосферы в оптическом диапазоне спектра. В этом случае $u(x)$ представляет собой истинную яркость атмосферы, $v(x)$ — измеренный оптическим сканирующим устройством сигнал, x, x' — пространственную координату, а интегральный оператор K описывает сглаживание прибором измеряемой яркости по полю зрения.

Второй, весьма важной сферой применения уравнения (1) является спектроскопия. В этом случае аргумент x, x' представляет длину волны или частоту излучения, интегральный оператор K описывает размывание по спектру измеряемого сигнала $u(x)$, которое происходит в спектральном приборе.

Уравнение (1) допускает также следующую общую интерпретацию: через сглаживающий фильтр K пропускается сигнал u, на выходе регистрируется сглаженный сигнал v. По данным измерения сглаженного сигнала требуется определить истинный сигнал u. Характерным признаком уравнения (1) является то, что в нем измеренную величину u и регистрируемый сигнал v можно интерпретировать как различные состояния одного и того же физического объекта. Если, например, u — яркость лимба Земли, то и v можно толковать тоже как яркость лимба (только несколько более сглаженной по сравнению с u). В частности, если размер поля зрения

$$\sigma=\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 k(x)\,dx\right]^{1/2} \tag{3}$$

намного меньше масштаба изменчивости изучаемого объекта X

$$\sigma\ll X\sim\left|u\Big/\frac{du}{dx}\right|, \tag{4}$$

то сглаживающим воздействием прибора можно пренебречь и полагать $u\approx v$. Необходимость в восстановлении возникает тогда, когда условие (4) не выполнено.

Уравнение (1) является некорректным и для его решения необходимо применить регуляризацию. Из существующих методов регуляризации наиболее известными являются метод оптимальной линейной фильтрации Винера [1], метод Тихонова [2–5] и метод наиболее гладкого допустимого ансамбля Турчина [6–8]. Подробное описание этих алгоритмов регуляризованного решения уравнения (1) можно найти в монографии [9].

В настоящей работе мы предлагаем метод решения уравнения (1), который можно рассматривать как своего рода синтез метода оптимальной линейной фильтрации с методами Тихонова и Турчина. Из метода Винера мы заимствуем общую схему решения и критерий оптимизации при выборе оператора восстановления, из методов Тихонова и Турчина — идею представления восстанавливающего оператора как функцию от малого числа параметров.

Мы будем искать приближенное регуляризованное решение уравнения (1) в виде

$$u_\tau = R_\tau v,$$

где R_τ — зависящий от параметров $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ линейный оператор. Параметры τ_i будем определять из условия минимума функционала

$$E\|u_\tau - u\|^2,$$

где E — оператор математического ожидания; $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(-\infty, \infty)$. Таким образом, восстановленное решение будет наилучшим приближением к неизвестному точному сигналу u в среднеквадратичном смысле. Это наиболее существенное отличие предлагаемого метода от методов Тихонова и Турчина, в которых отыскивается наиболее гладкое из всех возможных при заданном уровне погрешности решение. Настоящая работа является логическим продолжением работы [10].

2. Оптимальная линейная фильтрация в сочетании с параметризацией восстанавливающего оператора

Для решения задачи удобно использовать преобразование Фурье. Обозначим

$$\tilde{k}(\omega) = Fk(x) \equiv \int e^{i\omega x} k(x)\, dx,$$

$$\tilde{u}(\omega) = Fu(x), \quad \tilde{v}(\omega) = Fv(x), \quad \tilde{u}_\tau(\omega) = Fu_\tau(x).$$

Тогда преобразование Фурье для уравнения (1) будет

$$\tilde{v}(\omega) = \tilde{k}(\omega) \cdot \tilde{u}(\omega). \tag{5}$$

Непосредственно использовать это соотношение для определения $u(x)$ не удается, т. к. функция $\tilde{u}(\omega) = \tilde{v}(\omega)/\tilde{k}(\omega)$ оказывается при $|\omega| \to \infty$ расходящейся. Причиной тому является наличие в сигнале $v(x)$ погрешности измерения $\delta(x)$, спектральная плотность которой $\tilde{\delta}(\omega)$ не стремится к нулю при $|\omega| \to \infty$, что и составляет суть некорректности задачи. В дальнейшем целесообразно выделить в измеренном сигнале явно шумовую компоненту и записать вместо (5)

$$\tilde{v}(\omega) = \tilde{k}(\omega)\tilde{u}(\omega) + \tilde{\delta}(\omega). \tag{5a}$$

Предположим, что $\tilde{u}(\omega)$ и $\tilde{\delta}(\omega)$ являются представителями взаимно некоррелированных статистических ансамблей $\{\tilde{u}\}$ и $\{\tilde{\delta}\}$ с известными первыми и вторыми моментами

$$E[\tilde{u}(\omega)] < \infty, \quad E[|\tilde{u}(\omega)|^2] = a^2(\omega),$$
$$E[\tilde{\delta}(\omega)] = 0, \quad E[|\tilde{\delta}(\omega)|^2] = \varepsilon^2(\omega), \tag{6}$$
$$E[\tilde{\delta}^*(\omega)\cdot\tilde{u}(\omega)] = 0.$$

В частном случае допускается, что ансамбль $\{\tilde{u}\}$ состоит из одного единственного представителя

$$E[|\tilde{u}(\omega)|^2] = |\tilde{u}(\omega)|^2. \tag{7}$$

Из (5а) для второго момента функции $\tilde{v}(\omega)$ получим соотношение

$$E[|\tilde{v}(\omega)|^2] = |\tilde{k}(\omega)|^2 a^2(\omega) + \varepsilon^2(\omega). \tag{8}$$

Регуляризованное решение $\tilde{u}_\tau(\omega)$ будем искать в виде

$$\tilde{u}_\tau(\omega) = r(\omega)\tilde{v}(\omega), \tag{9}$$

где $r(\omega)$ — некоторая функция, которая не зависит от конкретных представителей статистического ансамбля $\tilde{u}(\omega)$ и $\tilde{\delta}(\omega)$. Функцию $r(\omega)$ определим из условия минимальности функционала

$$Q[r] = \frac{1}{2} E \int |\tilde{u}_\tau - \tilde{u}|^2 \, d\omega.$$

Используя (6), (8) и (9), этот функционал можно привести к виду

$$Q[r] = \frac{1}{2} \int [|1 - r\tilde{k}|^2 a^2 + |r|^2 \varepsilon^2] \, d\omega. \tag{10}$$

Если ни на r и ни на Q не наложены никакие ограничения, то из условия $\delta Q = 0$ получим для $r(\omega)$ формулу Винера

$$r(\omega) = \frac{k^*(\omega)}{k(\omega)k^*(\omega) + \varepsilon^2(\omega)/a^2(\omega)}. \tag{11}$$

При таком выборе восстанавливающего оператора решение (9) является наилучшим приближением к искомому профилю $\tilde{u}(\omega)$ в среднеквадратичном смысле. Однако на практике полученное решение, как правило, использовать не удается, т. к. функция $a^2(\omega)$ неизвестна или известна недостаточно точно.

Изменим теперь несколько постановку задачи. Будем искать функцию $r(\omega)$ параметрически, предполагая, что

$$r(\omega) = k^*(\omega)\cdot s(\omega, \tau), \tag{12}$$

где $s(\omega, \tau)$ — известная функция от частоты ω и параметров $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$. Параметры τ_i будем подбирать таким образом, чтобы функционал (10), который теперь можно рассматривать как функцию τ

$$Q[r(\tau)] \equiv q(\tau) =$$
$$= \frac{1}{2} \int [|1 - s(\omega,\tau)|\tilde{k}(\omega)|^2|^2 a^2(\omega) + |s(\omega,\tau)\tilde{k}(\omega)|^2 \varepsilon^2(\omega)] \, d\omega,$$

принял минимальное значение. Это приведет к уравнениям

$$\int \frac{\partial s(\omega,\tau)}{\partial \tau_i} [(s|\tilde{k}|^2 - 1) b^2 + s|\tilde{k}|^2 \varepsilon^2] \, d\omega = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

Здесь введено обозначение

$$b^2(\omega) = |k(\omega)|^2 a^2(\omega), \tag{14}$$

и, кроме того, предполагается, что $s(\omega, \tau)$ является действительно симметричной относительно точки $\omega=0$ функцией (такую структуру функции $s(\omega, \tau)$ подсказывает формула (11)).

Если при заданном $s(\omega, \tau)$ параметры τ_i подобраны так, что уравнения (13) удовлетворены, то решение (9) с восстанавливающим оператором (12) дает (при заданном s) наилучшее приближение к точному сигналу $\tilde{u}$ в среднеквадратичном смысле.

В общем случае (13) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров τ_i. Для решения этой системы нужно знать вторые одноточечные моменты $b^2(\omega)$ и $\varepsilon^2(\omega)$.

Характер этих моментов варьирует от задачи к задаче, поэтому могут возникать самые разнообразные ситуации. Разберем один из наиболее часто встречаемых случаев. Предположим, что

1) случайный ансамбль $\{\tilde{u}\}$ состоит из одной функции $\tilde{u}(\omega)$ (т. е. имеет место (7));

2) шум и полезный сигнал в спектре измеренной функции v разделяются

$$|\tilde{k}(\omega)\tilde{u}(\omega)| \gg \varepsilon(\omega), \quad |\omega|<\Omega,$$
$$|\tilde{k}(\omega)\tilde{u}(\omega)| \ll \varepsilon(\omega), \quad |\omega|>\Omega;$$

3) спектральная плотность шума $\varepsilon(\omega)$ является в первом приближении постоянной величиной

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0=\text{const}. \tag{15}$$

4) основной вклад в интегралы (13) даст область $|\omega|<\Omega$ (выполнение этого условия в значительной степени зависит от выбора функции $s(\omega, \tau)$.

Уравнения (13) можно при выполнении предположений 1)—4) заменить на следующую приближенную систему

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\partial s}{\partial \tau_i}(s|\tilde{k}|^2-1)|\tilde{v}|^2 d\omega+\varepsilon_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} s\frac{\partial s}{\partial \tau_i}|\tilde{k}|^2 d\omega=0, \quad i=1, \ldots, N. \tag{16}$$

Входящие сюда величины $\tilde{v}(\omega)$, Ω и ε_0 оцениваются из конкретного единичного эксперимента. Таким образом, при каждом измерении сигнала $v(x)$ получаются различные, оптимальные для данного конкретного измерения, значения параметров τ_i.

Отметим, что уравнения (16) можно получить из общей системы (13), если относительно случайного ансамбля $\{\tilde{\delta}\}$ сделать предположение (15), а относительно ансамбля $\{\tilde{u}\}$ — предположение

$$b^2(\omega)=\begin{cases} |\tilde{v}(\omega)|^2, & |\omega|<\Omega, \\ 0, & |\omega|>\Omega. \end{cases} \tag{17}$$

Это предположение означает, что мы априори считаем $\{u(x)\}$ гладким ансамблем, в котором отсутствуют высокие частоты в области $|\omega|>\Omega$.

3. Примеры параметризации восстанавливающего оператора

Рассмотрим некоторые конкретные способы выбора функции $s(\omega, \tau)$ в операторе (12).

А. Пусть $s(\omega, \tau)$ имеет вид

$$s(\omega, \tau)=1/[|\tilde{k}(\omega)|^2+\sum_{i=0}^{N}\tau_i\omega^{2i}]. \tag{18}$$

Такой выбор подсказывается структурой общего оператора (11).

К такой же функции $s(\omega,\tau)$ приводят в наиболее общем случае метод обобщенной невязки [4, 5] и метод наиболее гладкого ансамбля [6, 7].

Подстановка функции (18) в систему (16) приводит к уравнениям

$$\sum_{j=0}^{N}\tau_j\int_0^{\Omega}\frac{\omega^{2(i+j)}|\tilde v(\omega)|^2\,d\omega}{[|\tilde k(\omega)|^2+\sum_{p=0}^{N}\tau_p\omega^{2p}]^3}=\varepsilon_0^2\int_0^{\infty}\frac{\omega^{2i}|\tilde k(\omega)|^2\,d\omega}{[|k(\omega)|^2+\sum_{p=0}^{N}\tau_p\omega^{2p}]^3},\qquad i=0,\ldots,N. \tag{19}$$

Частный, наиболее простой случай одномерной параметризации получим, если в (18) будем полагать все τ_i равными нулю, за исключением $\tau_1=\tau$,

$$s(\omega,\tau)=1/[|\tilde k(\omega)|^2+\tau\omega^2]. \tag{20}$$

Для параметра τ в этом случае имеем уравнение

$$\tau\int_0^{\Omega}\frac{\omega^4|\tilde v(\omega)|^2\,d\omega}{[|\tilde k(\omega)|^2+\tau\omega^2]^3}=\varepsilon_0^2\int_0^{\infty}\frac{\omega^2|\tilde k(\omega)|^2\,d\omega}{[|\tilde k(\omega)|^2+\tau\omega^2]^3}. \tag{21}$$

Здесь справа стоит малый множитель ε_0^2, в силу чего и решение τ окажется малым параметром. Однако нельзя полагать $\varepsilon_0=0$, так как в этом случае уравнение (21) не будет иметь решения в области $\tau>0$ и оператор $r(\omega,\tau)$ не будет обладать необходимыми свойствами регулярности.

Б. Если функция $\tilde k(\omega)$ стремится к нулю достаточно быстро при $|\omega|\to\infty$, то $s(\omega,\tau)$ можно разложить в степенной ряд в окрестности точки $\omega=0$. Это приведет к представлению

$$s(\omega,\tau)=1+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\omega^{2i}. \tag{22}$$

Здесь для регулярности оператора $r=k^*s$ необходимо, чтобы выполнялось условие $k^*\cdot\omega^{2N}\to 0$ при $|\omega|\to\infty$. Подстановка выражения (22) в систему (16) приводит к линейным уравнениям для определения τ_i. Специфической чертой получаемых уравнений является то, что в них можно пренебречь членами, зависящими от параметра ε_0 (т. е. при использовании формулы (22) можно в (16) полагать $\varepsilon_0=0$), поэтому будем иметь

$$\sum_{j=1}^{N}A_{i+j}\tau_j=B_i,\quad i=1,\ldots,N, \tag{23}$$

где

$$A_i=\int_0^{\Omega}\omega^{2i}|k(\omega)|^2|\tilde v(\omega)|^2\,d\omega,\qquad B_i=\int_0^{\Omega}\omega^{2i}|\tilde v(\omega)|^2[1-|\tilde k(\omega)|^2]\,d\omega. \tag{24}$$

В частности, при $N=1$ получим

$$s(\omega,\tau)=1+\tau\omega^2,$$
$$\tau=B_1/A_2.$$

В. Еще один интересный способ параметризации восстанавливающего оператора получим, если вместо (12) используем формулу

$$r(\omega,\tau)=1+\tilde k(\omega)\sum_{i=1}^{N}\tau_i\omega^{2i}. \tag{25}$$

Такая параметризация является корректной (не приводит к противоречиям с требованием симметрии и действительности функции $\tilde k\cdot r$), если

$\tilde{k}(\omega)$ является четной действительной функцией: $\tilde{k}(\omega)=\tilde{k}(-\omega)=\tilde{k}^*(\omega)$. Для параметров τ_i получим (при выполнении условий 1)—4) предыдущего раздела и при пренебрежении членами, зависящими от ε_0) уравнения (23) со свободными членами B_i, несколько отличающимися от свободных членов в формулах (24) (матричные элементы A_{i+j} остаются без изменения)

$$B_i=\int_0^{\Omega}\omega^{2i}|\tilde{v}(\omega)|^2[1-\tilde{k}(\omega)]d\omega.$$

Одномерный частный случай параметризации (25) при $N=1$ был подробно разобран в работе [10]. Замечательное свойство оператора (25) заключается в том, что при нем выполняется (в случае оптимального выбора параметров τ_i) условие

$$\|\tilde{u}_\tau-\tilde{u}\|=\|r(\tau)\tilde{v}-\tilde{u}\|\leqslant\|r(0)\tilde{v}-\tilde{u}\|=\|\tilde{v}-\tilde{u}\|,$$

и, таким образом, оператор (25) всегда улучшает измеренный сигнал.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wiener, N.* Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engeneering Applications. New York, Wiley, 1949.
2. *Phillips, D. L.* // J. Assoc. Comput. Mach., 1962, **9**, № 1, 84—97.
3. *Тихонов А. Н.* // ДАН СССР, 1963, **151**, № 3, 501—504.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979.
5. *Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М., Наука, 1983.
6. *Турчин В. Ф.* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, **7**, № 6. 1270—1284.
7. *Турчин В. Ф.* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1968, **8**, № 1, 230—238.
8. *Турчин В. Ф., Нозик В. З.* // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана, 1969, **V**, № 1, 29—38.
9. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы, Киев, Наукова думка, 1986.
10. *Рыым Р.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1989, **38**, № 2, 213—221.

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
7/IX 1988

R. ROOM

OPTIMAALSE LINEAARSE FILTREERIMISE KASUTAMISEST EBAKORREKTSETE ÜLESANNETE LAHENDAMISEL

Ebakorrektse sidumi tüüpi integraalvõrrandi lahendamiseks soovitatakse kasutada Wieneri lineaarse filtreerimise meetodit koos filtreeriva operaatori parameetrilise etteandmisega, kusjuures parameetrid valitakse optimumprintsiibil.

R. ROOM

ON THE USE OF THE OPTIMAL LINEAR FILTERING FOR THE SOLUTION OF THE ILL-POSED PROBLEMS

For the solution of the ill-posed problem in the form of the Fredholm's first kind convolution-type integral equation $Ku=v$, the optimal linear filtering method, combined with the parametric representation of the filtering operator, is proposed. The regularized solution is sought in the form $u_\tau=R_\tau v$, where R_τ is a given linear filtering operator depending on the parameters $\tau=\{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$. The parameters τ_i are to be determined from the minimizing criterion for the optimizing functional $E\|u_\tau-u\|^2$, where E represents the operator of the mathematical expectation and $\|\cdot\|$ — the norm in space L_2. The special cases of the operator R_τ are considered when the determination of the parameters τ_i reduces to the solution of the equations the coefficients of which depend on the function v and the operator K only.