Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1989, 38, № 3, 241—251

УДК 519.722

Т. ЛАУСМАА

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ НА СИСТЕМАХ РАЗБИЕНИЙ

(Представил Ю. Яаксоо)

Современный этап развития техники проектирования различных системных объектов характеризуется переходом к системам автоматизированного проектирования (САПР). Это предполагает новый подход к основам проектирования, требующий единого универсального представления подлежащих проектированию объектов, а также формализованных численных оценок этого представления, заменяющих оценки, базирующиеся на человеческой интуиции. На практике все системные объекты можно представить в виде подмножества декартового произведения конечных множеств, предложенного в [1]. Поскольку изложенное [1] представление системного объема является эквивалентным представлению объекта через систему разбиений, то одним из возможных подходов для создания САПР является подход, при котором сперва дается информация об объекте в виде системы разбиений, а затем оценка объекту на основе этой информации.

В настоящей статье продолжается рассмотрение информационных оценок системы разбиений, начатое в [2]. Предполагается, что в основном все численные оценки системы разбиений, имеющие практическую ценность, можно представить на базе вещественных функций на системах разбиений, которые называются информационными. Информационные функции основаны на понятии энтропии разбиения, алгебраическое обоснование которого дано в [3]. В настоящей работе приводятся свойства информационных функций взаимодействия, взаимозависимости и взаиморазличия, которые отражают основные аспекты оценки систем разбиений. Функции взаимодействия и взаимозависимости были впервые рассмотрены в [4–6]. Функция взаиморазличия для систем из двух элементов совпадает с функцией расстояния [7]. Показано, что если нас интересует неотрицательная симметричная информационная функция:

а) которая для любой приводимой системы разбиений равняется нулю;

б) значение которой при разбивке системы разбиений на дизъюнктивные подсистемы равняется сумме значений для этих же подсистем плюс значение для системы из двух разбиений, которыми являются произведения разбиений, принадлежащие к дизъюнктивным подсистемам;

в) которая при гомогенной системе равняется нулю и не изменяет свое значение при прибавлении к системе единичного разбиения; то с точностью до положительной константы она совпадает с функцией:

а) взаимодействия;
б) взаимозависимости;
в) взаиморазличия.

Разбиение произвольного конечного множества $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ на непустые блоки $B_i^{(1)}, B_i^{(2)}, \ldots, B_i^{(\alpha)}, \ldots, B_i^{(m_i)}$ обозначим через $\pi_i(X)$. В частности, 0_X — нулевое разбиение, а 1_X — единичное. Для любого подмножества $X' \subset X$ определим его вес $q_X(X')$ как отношение $q_x(X') \underset{\mathrm{Df}}{=} \|X'\|/\|X\|$ (обычно индекс у q опускается). Разбиения $\pi_i(X')$ и $\pi_j(X'')$ будем называть эквивалентными (обозначение $\pi_i(X') \equiv \pi_j(X'')$), если только существует биекция $\varphi: \pi_i \to \pi_j$ между их блоками такая, что для любого $B_i^{(\alpha)} \in \pi_i$ имеет место $q_{X'}(B_i^{(\alpha)}) = q_{X''}(\varphi(B_i^{(\alpha)}))$. Сужением разбиения $\pi_i(X)$ на $X' \subset X$ будем называть разбиение $\bar{\pi}_i(X') \underset{\mathrm{Df}}{=} \{B_i^{(\alpha)} \cap X' \mid B_i^{(\alpha)} \in \pi_i \wedge B_i^{(\alpha)} \cap X' \neq \varnothing\}$. Для любых разбиений $\pi_i(X)$ и $\pi_j(X)$ примем, что $\pi_i \cdot \pi_j \underset{\mathrm{Df}}{=} \{B_i^{(\alpha)} \cap B_j^{(\beta)} \mid B_i^{(\alpha)} \in \pi_i \wedge B_j^{(\beta)} \in \pi_j \wedge B_i^{(\alpha)} \cap B_j^{(\beta)} \neq \varnothing\}$ и $\pi_i + \pi_j \underset{\mathrm{Df}}{=} \prod \{\pi_k(X) \mid \pi_k \geqslant \pi_i, \pi_j\}$, где $\pi_i \leqslant \pi_j \underset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} \pi_i \cdot \pi_j = \pi_i$. Для каждого разбиения $\pi_i(X)$ определим энтропию

$$H(\pi_i) \underset{\mathrm{Df}}{=} -\sum_{\alpha=1}^{m_i} q(B_i^{(\alpha)}) \ln q(B_i^{(\alpha)}).$$

Энтропия является исключительно внутренней характеристикой разбиения. Примем, что условная энтропия $H(\pi_j/\pi_i) \underset{\mathrm{Df}}{=} H(\pi_i \cdot \pi_j) - H(\pi_i)$. Энтропии присущи следующие свойства [2, 3, 8]:

1) неотрицательность: для любого $\pi_i(X)$ всегда $H(\pi_i) \geqslant 0$;
2) инвариантность: если $\pi_i(X') \equiv \pi_j(X'')$, то $H(\pi_i) = H(\pi_j)$;
3) монотонность: из неравенств $\pi_i(X) \leqslant \pi_k(X)$ и $\pi_h(X) \geqslant \pi_j(X)$ следует $H(\pi_i/\pi_h) \geqslant H(\pi_k/\pi_j)$;
4) рекурсивность: для любых $\pi_i(X)$ и $\pi_j(X)$ верно $H(\pi_i \cdot \pi_j) = H(\pi_i) + \sum_{\alpha=1}^{m_i} q(B_i^{(\alpha)}) H(\bar{\pi}_j(B_i^{(\alpha)}))$;
5) субаддитивность: для любых $\pi_h(X)$, $\pi_i(X)$, $\pi_j(X)$ и $\pi_k(X)$ справедливо

а) $H(\pi_i/\pi_h) + H(\pi_k/\pi_j) \geqslant H(\pi_i \cdot \pi_k/\pi_h \cdot \pi_j)$,

б) $H(\pi_i) + H(\pi_j) \geqslant H(\pi_i \cdot \pi_j) + H(\pi_i + \pi_j)$.

Примем, что $\pi_i(X)$ квазинезависимо относительно $\pi_j(X)$ (обозначение $\pi_i \mathrm{T} \pi_j$), если только для любых $B \in \pi_i + \pi_j$ и $B_j^{(\alpha)} \in \pi_j$ при $B_j^{(\alpha)} \subset B$ справедливо $\bar{\pi}_i(B) \equiv \bar{\pi}_i(B_j^{(\alpha)})$.

При $\pi_i(X) + \pi_j(X) = 1_X$ квазинезависимые разбиения π_i и π_j будем называть независимыми (обозначение $\pi_i \mid \pi_j$).

Системой разбиений $P(X)$ назовем семейство разбиений на X, индексированное некоторым конечным множеством индексов A, т. е. $P(X) = \{\pi_i(X) \mid i \in A\}$. Предположим, что для любых $P'(X) = \{\pi_i'(X) \mid i \in A'\}$ и $P''(X) = \{\pi_j''(X) \mid j \in A''\}$ из $k \in A' \cap A''$ всегда следует $\pi_k' = \pi_k''$. Это позволяет нам естественным образом определить операции $\subset$, $\cap$ и $\cup$ для систем разбиений через их индексные множества. Рангом системы разбиений $P(X)$ назовем число $w \underset{\mathrm{Df}}{=} \|A\|$. Если надо особо подчеркнуть, что система $P(X)$ имеет ранг n, то вместо $P(X)$ напишем $P_n(X)$. Обычно предполагается, что $P_n(X) = \{\pi_1(X), \pi_2(X), \ldots, \pi_n(X)\}$. Введем обозначение $m(P) \underset{\mathrm{Df}}{=} \prod_{i \in A} \pi_i$. Примем, что для пустой системы разбиений $\varnothing_P$ имеем $m(\varnothing_P) = 1_X$. Нетрудно убедиться, что для любых систем P' и P'' верно $m(P') \cdot m(P'') = m(P' \cup P'')$ и $m(P') + m(P'') \leqslant m(P' \cap P'')$. Поэтому, в силу $H(\pi_i) + H(\pi_j) \geqslant H(\pi_i \cdot \pi_j) + H(\pi_i + \pi_j)$, имеем $H(m(P')) + H(m(P'')) \geqslant H(m(P' \cup P'')) + H(m(P' \cap P''))$. Систему разбиений P_n назовем при $n>1$ гомогенной, если только для любых π_i, $\pi_j \in P_n$ верно $\pi_i = \pi_j$. Системы разбиений $P'(X)$ и $P''(X)$ назовем взаимно независимыми, если только $H(m(P')) + H(m(P'')) = H(m(P' \cup P''))$. Легко увидеть, что взаимная независимость P' и P'' эквивалентна условию $m(P') \mid m(P'')$. Систему разбиений P назовем приводимой, если только она распадается на взаимно независимые подсистемы.

Множество всевозможных систем разбиений $P_n(X)$ обозначим через $\mathfrak{P}(X)$. Функцию $\mathfrak{F}$ с вещественной областью значений, определенную на $\mathfrak{P}$, которая для каждой $P_n(X)$ вычисляется по

$$\mathfrak{F}(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}}^{n} Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k} H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_k}),$$

где каждый $Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — некоторая вещественная константа, назовем информационной функцией. Функцию $\mathfrak{F}(P)$ назовем симметричной, если только для любых наборов индексов i_1', i_2', ..., i_k' и i_1'', i_2'', ..., i_k'' при $1 \leqslant k \leqslant n$ верно $Q^n_{i_1' i_2' \ldots i_k'} = Q^n_{i_1'' i_2'' \ldots i_k''}$. При симметричной функции $\mathfrak{F}$ вместо $Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ напишем просто Q_k^n. Для любых информационных функций $\mathfrak{F}_\alpha$ и $\mathfrak{F}_\beta$ поставим в соответствие информационные функции $\mathfrak{F}_\alpha \times \mathfrak{F}_\beta$ и $\mathfrak{F}_\alpha // \mathfrak{F}_\beta$, определенные для каждых $P_n'(X)$ и $P_m''(X)$ следующим образом:

$$\mathfrak{F}_\alpha(P'_n) \times \mathfrak{F}_\beta(P''_m) \underset{\mathrm{Df}}{=}$$

$$\underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{h,k=1}^{n,m} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_h = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_h}}^{n} \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_k \\ j_1 < j_2 < \ldots < j_k}}^{m} (Q_\alpha)^n_{i_1 i_2 \ldots i_h} (Q_\beta)^m_{j_1 j_2 \ldots j_k} \times$$

$$\times H(\pi'_{i_1} \cdot \pi'_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi'_{i_h} \cdot \pi''_{j_1} \cdot \pi''_{j_2} \cdot \ldots \cdot \pi''_{j_k})$$

и

$$\mathfrak{F}_\alpha(P'_n) // \mathfrak{F}_\beta(P''_m) \underset{\mathrm{Df}}{=}$$

$$\underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{h,k=1}^{n,m} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_h = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_h}}^{n} \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_k \\ j_1 < j_2 < \ldots < j_k}}^{m} (Q_\alpha)^n_{i_1 i_2 \ldots i_h} (Q_\beta)^m_{j_1 j_2 \ldots j_k} \times$$

$$\times H(\pi'_{i_1} \cdot \pi'_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi'_{i_h} / \pi''_{j_1} \cdot \pi''_{j_2} \cdot \ldots \cdot \pi''_{j_h}).$$

Ясно, что $\mathfrak{F}_\alpha(P') \times \mathfrak{F}_\beta(P'') = \mathfrak{F}_\beta(P'') \times \mathfrak{F}_\alpha(P')$. Введем обозначения $\mathfrak{F}(P' \cdot P'') \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathfrak{F}(P') \times \mathfrak{F}(P'')$ и $\mathfrak{F}(P'/P'') \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathfrak{F}(P') // \mathfrak{F}(P'')$. При $P'' = \{\pi_\alpha\}$ вместо $\mathfrak{F}(P' \cdot \{\pi_\alpha\})$ и $\mathfrak{F}(P'/\{\pi_\alpha\})$ напишем просто $\mathfrak{F}(P' \cdot \pi_\alpha)$ и $\mathfrak{F}(P'/\pi_\alpha)$. Интерпретируя $\mathfrak{F}(P^{(i)} \cdot P^{(j)})$ как информационную функцию на $P^{(i)} \cup P^{(j)}$, нетрудно убедиться, что для любых систем $P(X)$, $P'(X)$ и $P''(X)$ всегда имеет место равенство $\mathfrak{F}((P \cdot P') \cdot P'') = \mathfrak{F}((P' \cdot P'') \cdot P)$. Функцию $\mathfrak{F}$ назовем нулевой, если только для произвольной системы P_n всегда $\mathfrak{F}(P_n) = 0$.

Лемма 1. *При нулевой функции $\mathfrak{F}_0$ для любого $n \geqslant 1$ все константы $Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ равны нулю.*

Доказательство. Пусть $\pi \neq 1_X$ и P_n — гомогенная система разбиений, где для любого $i \leqslant n$ всегда $\pi_i = \pi$. По предположению $\mathfrak{F}_0(P_n) = 0$. Пусть теперь $\alpha \leqslant n$ и P_n' — система разбиений, где

$\pi_\alpha' = 1_x$, а для любого $i \leqslant n$ из $i \neq \alpha$ следует $\pi_i' = \pi$. Тогда, учитывая, что $H(\pi_\alpha) = H(\pi) \neq 0$ и $H(\pi_\alpha') = \mathfrak{F}_0(P_n') = 0$, получаем $Q_\alpha^n = 0$. Ясно, что это верно для произвольного $\alpha = 1, \ldots, n$. Предположим теперь при какой-то $m < n$, что все коэффициенты $Q^n_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ $(k \leqslant m)$ равны нулю. Рассмотрим систему P_n'', где $\pi''_{i_1} = \pi''_{i_2} = \ldots = \pi''_{i_{m+1}} = 1_x$, а для остальных $\pi_j'' \in P_n''$ имеем $\pi_j'' = \pi$. Тогда, в силу того, что для любого $k \leqslant m$ по предположению $Q^n_{j_1 j_2 \ldots j_k} = 0$, из $\mathfrak{F}_0(P_n'') = 0$ следует $Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_{m+1}} = 0$. Из-за произвольности $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$ получаем, что при $k \leqslant m+1$ всегда $Q^n_{j_1 j_2 \ldots j_k} = 0$. Итак, по индукции все коэффициенты $\mathfrak{F}_0$ равны нулю. Лемма доказана.

Следствие. *Любую информационную функцию $\mathfrak{F}$ можно однозначно характеризовать через ее коэффициенты, т. е. если для функций $\mathfrak{F}'$ и $\mathfrak{F}''$ при произвольной системе P_n всегда верно $\mathfrak{F}'(P_n) = \mathfrak{F}''(P_n)$, то $(Q')^n_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (Q'')^n_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $(k \leqslant n)$.*

Функцию $\mathfrak{F}(P)$ назовем функцией взаимодействия (обозначение $\mathfrak{J}(P)$), если только $\mathfrak{J}(P_n) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} H(\pi_i) - \sum\limits_{P_2^{(i)} \subset P_n} H(m(P_2^{(i)})) + \sum\limits_{P_3^{(i)} \subset P_n} H(m(P_3^{(i)})) - \ldots \pm H(m(P_n))$. Ясно, что $\mathfrak{J}(P_1) = H(\pi_1)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}(P)$ — информационная функция, которая для любой приводимой системы равняется нулю. Тогда $\mathfrak{F}(P)$ равняется $C\mathfrak{J}(P)$, где C — некоторая вещественная константа.*

Доказательство. Если P_n приводимая, то она распадается на взаимно независимые подсистемы. Предполагаем теперь, что $\pi_n \mid m(P_n \setminus \{\pi_n\})$. Тогда по предположению получаем, что

$$\mathfrak{F}(P_n) = \sum_{i=1}^{n} Q^n_i H(\pi_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} Q^n_{ij} H(\pi_i \cdot \pi_j) + \ldots +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}}^{n} Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k} H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_k}) + \ldots + Q^n_{12\ldots n} H(m(P_n)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q^n_i H(\pi_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n-1} Q^n_{ij} H(\pi_i \cdot \pi_j) + \sum_{i=1}^{n-1} Q^n_{in} (H(\pi_i) + H(\pi_n)) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,h=1 \\ i<j<h}}^{n-1} Q^n_{ijh} H(\pi_i \cdot \pi_j \cdot \pi_h) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n-1} Q^n_{ijn} (H(\pi_i \cdot \pi_j) + H(\pi_n)) + \ldots +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}}^{n-1} Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k} H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_k}) + \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1}}}^{n-1} Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \times$$

$$\times (H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_{k-1}}) + H(\pi_n)) + \ldots + Q^n_{12\ldots n} (H(\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_{n-1}) +$$

$$+ H(\pi_n)) = 0.$$

Поскольку для произвольной P_n всегда верно $m(P_n) \mid \{1_x\}$, то из вышеизложенного в силу леммы 1 следует, что

$$\{Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k} + Q^n_{i_1 i_2 \ldots i_k n} = 0 \mid i_1, i_2, \ldots, i_k;\ k = 1, \ldots, n-1;$$
$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n\}.$$

Определим теперь новые константы $\{\bar{Q}^n_{i_1 i_2 \dots i_k} \mid i_1, i_2, \dots, i_k;\ k=1, \dots$
$\dots, n;\ i_\alpha = i_\beta \Rightarrow \alpha=\beta\}$, принимая, что каждая

$$\bar{Q}^n_{i_1 i_2 \dots i_k} \underset{\mathrm{Df}}{=} \begin{cases} Q^n_{i_1 i_2 \dots i_k}, & \text{если } i_1 < i_2 < \dots < i_k; \\ Q^n_{\varphi(i_1)\varphi(i_2)\dots\varphi(i_k)}, & \text{в противном случае, где } \varphi \text{ — пермутация на } \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \text{ такая, что } \varphi(i_1) < \varphi(i_2) < \dots < \varphi(i_k). \end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю получаем для $\pi_{n-1} | m(P_n \setminus \{\pi_{n-1}\})$ следующую систему равенств:

$$\{\bar{Q}^n_{i_1 i_2 \dots i_k} + \bar{Q}^n_{i_1 i_2 \dots i_k n-1} = 0 \mid i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, n-2, n;$$
$$k=1, 2, \dots, n-1\}.$$

Выписывая аналогичным образом еще системы равенств для случаев

$$\pi_{n-2} | m(P_n \setminus \{\pi_{n-2}\}),\ \pi_{n-3} | m(P_n \setminus \{\pi_{n-3}\}),\ \dots,\ \pi_1 | m(P_n \setminus \{\pi_1\}),$$

получаем в результате систему

$$\{\bar{Q}^n_{i_1 i_2 \dots i_k} + \bar{Q}^n_{i_1 i_2 \dots i_k h} = 0 \mid i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, h-1, h+1, \dots, n;$$
$$k=1, \dots, n-1\}.$$

Из равенств типа $\{\bar{Q}^n_i + \bar{Q}_{ij} = 0 \mid i=1, 2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n\}$ получаем для каждых $i<j\leqslant n$, что

$$Q^n_i = Q^n_j = -Q^n_{ij}. \tag{1}$$

Далее, из равенств $\{\bar{Q}^n_{ij} + \bar{Q}^n_{ijh} = 0 \mid i, j = 1, 2, \dots, h-1, h+1, \dots, n\}$ имеем для любых $i<j<h\leqslant n$, что

$$Q^n_{ij} = Q^n_{ih} = Q^n_{jh} = -Q^n_{ijh}. \tag{2}$$

Продолжая таким же образом, убеждаемся, что для любых $i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1} \leqslant n$ верно

$$Q^n_{i_2 i_3 \dots i_{k+1}} = Q^n_{i_1 i_3 \dots i_{k+1}} = Q^n_{i_1 i_2 i_4 \dots i_{k+1}} = \dots = Q^n_{i_1 i_2 \dots i_k} = -Q^n_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}. \tag{k}$$

Суммарно эти соотношения (1), (2), ..., (k), ..., (n—1) дадут для любых $i<j<h<\dots\leqslant n$, что

$$|Q^n_i| = |Q^n_{ij}| = |Q^n_{ijh}| = \dots = |Q^n_{12\dots n}| = |Q|.$$

Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что для любого натурального числа $n \geqslant 1$ верны следующие равенства:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = 1$.

Теорема 2. *Для любых систем $P(X)$, $P'(X)$ и $P''(X)$ верны следующие соотношения:*

1) *если* $\pi_i, \pi_j \in P$ и $\pi_i \leqslant \pi_j$, *то* $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(P \setminus \{\pi_i\})$;
2) $\mathfrak{I}(P'/P'') = \mathfrak{I}(P'/P'' \setminus P') = \mathfrak{I}(P' \cdot P'') - \mathfrak{I}(P'')$;
3) $\mathfrak{I}((P' \cup P'') \cdot P) = \mathfrak{I}(P' \cdot P) + \mathfrak{I}(P'' \cdot P) - \mathfrak{I}(P' \cdot P'' \cdot P)$;
4) *если* $m(P') \mid m(P'')$, *то* $\mathfrak{I}(P' \cup P'') = 0$.

Доказательство. 1. Пусть $\pi_i, \pi_j \in P_n$ и $\pi_i \leqslant \pi_j$. Поскольку для каждого $P_k^{(\alpha)} \subset P_n$ при $\pi_i \in P_k$, $\pi_j \in P_k$ и $k=1, 2, \dots, n-1$ найдется $P^{(\alpha)}_{k+1} \subset P_n$ такая, что $m(P^{(\alpha)}_k) = m(P^{(\alpha)}_{k+1})$, принимая $P^{(\alpha)}_{k+1} \underset{\mathrm{Df}}{=} P^{(\alpha)}_k \cup \{\pi_j\}$, то все члены функции $\mathfrak{J}(P_n)$, содержащие π_i вычеркиваются и тем самым $\mathfrak{J}(P_n)=\mathfrak{J}(P_n\backslash\{\pi_i\})$.

2. Несложно вывести из определения, учитывая, что $H(\pi_i/\pi_j)=$ $=H(\pi_i\cdot\pi_j)-H(\pi_j)$ и $H(\pi_i\cdot\pi_j/\pi_j\cdot\pi_k)=H(\pi_i/\pi_j\cdot\pi_k)$.

3. В самом деле, $\mathfrak{J}((P_p{}'\cup P_q{}'')\cdot P_r)=$

$$=\sum_{k=1}^{p+q}(-1)^{k+1}\sum_{h=1}^{r}(-1)^{r+1}\sum_{P_k^{(\alpha)}\subset P'_p\cup P''_q}\ \sum_{P_h^{(\beta)}\subset P_r}H(m(P_k^{(\alpha)})\cdot m(P_h^{(\beta)}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\sum_{h=1}^{r}(-1)^{r+1}\sum_{P_i^{(\alpha)}\subset P'_p}\ \sum_{P_h^{(\beta)}\subset P_r}H(m(P_i^{(\alpha)})\cdot m(P_h^{(\beta)}))+$$

$$+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\sum_{h=1}^{r}(-1)^{r+1}\sum_{P_j^{(\beta)}\subset P''_q}\ \sum_{P_h^{(\beta)}\subset P_r}H(m(P_j^{(\alpha)})\cdot m(P_h^{(\beta)}))+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{p,q}(-1)^{i+j+1}\sum_{h=1}^{r}(-1)^{r+1}\sum_{\substack{P_i^{(\alpha)}\subset P'_p\\ P_j^{(\beta)}\subset P''_q}}\ \sum_{P_h^{(\gamma)}\subset P_r}H(m(P_i^{(\alpha)})\cdot m(P_j^{(\beta)})\cdot m(P_h^{(\gamma)}))=$$

$$=\mathfrak{J}(P'_p\cdot P_r)+\mathfrak{J}(P''_q\cdot P_r)-\mathfrak{J}(P'_p\cdot P''_q\cdot P_r).$$

4. Действительно, если $m(P_q{}')\,|\,m(P_r{}'')$, то

$$\mathfrak{J}(P'_q\cup P''_r)=\sum_{h=1}^{q}(-1)^{h+1}\sum_{P_h^{(\alpha)}\subset P'_q}H(m(P_h^{(\alpha)}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\sum_{P_k^{(\beta)}\subset P''_r}H(m(P_k^{(\beta)}))+$$

$$+\sum_{h,k=1}^{q,r}(-1)^{h+k+1}\sum_{P_h^{(\alpha)}\subset P'_q}\ \sum_{P_k^{(\beta)}\subset P''_r}(H(m(P_h^{(\alpha)}))+H(m(P_k^{(\beta)}))=$$

$$=\mathfrak{J}(P'_q)+\mathfrak{J}(P''_r)-\sum_{h=1}^{q}(-1)^{h+1}\sum_{P_h^{(\alpha)}\subset P'_q}\ \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\binom{r}{k}H(m(P_h^{(\alpha)}))-$$

$$-\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\sum_{P_k^{(\beta)}\subset P''_r}\ \sum_{h=1}^{q}(-1)^{h+1}\binom{q}{h}H(m(P_k^{(\beta)}))=0.$$

Теорема доказана.

Информационную функцию $\mathfrak{F}(P)$ назовем функцией взаимозависимости (обозначение $\mathfrak{T}(P)$), если только она имеет следующее определение:

$$\mathfrak{T}(P)\underset{\mathrm{Df}}{=}\sum_{i\in A}H(\pi_i)-H(m(P)).$$

Очевидно, что $\mathfrak{T}(P_1)=0$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}(P)$ — неотрицательная симметричная информационная функция. Если для произвольных дизъюнктивных систем $P'(X)$ и $P''(X)$ имеет место равенство*

$$\mathfrak{F}(P'\cup P'')=\mathfrak{F}(P')+\mathfrak{F}(P'')+\mathfrak{F}(\{m(P'),\,m(P'')\}),$$

то $\mathfrak{F}(P)=C\mathfrak{T}(P)$, где C — некоторая положительная константа.

Доказательство. Действительно, в силу леммы 1 по предположению

$$\mathfrak{F}(P'_q \cup P''_r) = \mathfrak{F}(P'_q) + \mathfrak{F}(P''_r) + \mathfrak{F}(\{m(P'_q), m(P''_r)\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in A' \cup A''} Q^{q+r} H(\pi_i) + \sum_{P_2^{(\alpha)} \subset P'_q \cup P''_r} Q_2^{q+r} H(m(P_2^{(\alpha)})) + \ldots + Q_{q+r}^{q+r} H(m(P'_q \cup P''_r)) =$$

$$= \sum_{i \in A'} Q_1^q H(\pi_i) + \sum_{P_2^{(\alpha)} \subset P'_q} Q_2^q H(m(P_2^{(\alpha)})) + \ldots + Q_q^q H(m(P'_q)) +$$

$$+ \sum_{j \in A''} Q_1^r H(\pi_j) + \sum_{P_2^{(\beta)} \subset P''_2} Q_2^r H(P_2^{(\beta)})) + \ldots + Q_r^r H(m(P''_r)) +$$

$$+ Q_1^2 H(m(P'_q)) + Q_1^2 H(m(P''_r)) + Q_2^2 H(m(P'_q) \cdot m(P''_r)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1^q = Q_1^r = Q_1^{q+r};\quad Q_1^2 + Q_q^q = Q_1^2 + Q_r^r = 0, \quad \text{для любых } i = 2, 3, \ldots q-1$$

и $j = 2, 3, \ldots, r-1$ верно соответственно $Q_i{}^q = 0$ и $Q_j{}^r = 0$. Поскольку в силу произвольности q и $rQ_1{}^2 = Q_1{}^q = Q_1{}^r$, то $Q_q{}^q = -Q_1{}^q$ и $Q_r{}^r = -Q_1{}^r$. Итак, принимая $Q = Q_1{}^q = Q_1{}^r$, получаем $\mathfrak{F}(P) \geqslant 0$, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 4. *Функция $\mathfrak{T}(P)$ имеет при произвольных $P(X)$, $P'(X)$ и $P''(X)$ следующие свойства:*

1) *из* $P_n \supset P_{h-1} \supset \ldots \supset P_2$ *следует* $\mathfrak{T}(P_n) \geqslant \mathfrak{T}(P_{h-1}) \geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{T}(P_2) \geqslant 0$;

2) $\mathfrak{T}(P_n) \geqslant \mathfrak{T}(P_n)//\mathfrak{F}(\{\pi_n\}) \geqslant \mathfrak{T}(P_n)//\mathfrak{F}(\{\pi_{h-1} \cdot \pi_n\}) \geqslant$
$\geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{T}(P_n)//\mathfrak{F}(\{\pi_3 \cdot \pi_4 \cdot \ldots \cdot \pi_n\}) \geqslant 0$;

3) $$\mathfrak{T}(P_n) = \sum_{P_2^{(\alpha)} \subset P_n} \mathfrak{F}(P_2^{(\alpha)}) - \sum_{P_3^{(\beta)} \subset P_n} \mathfrak{F}(P_3^{(\beta)}) + \ldots \mp \mathfrak{F}(P_n) =$$

$$= \sum_{P_2^{(\alpha)} \subset P_n} \mathfrak{F}(P_2^{(\alpha)}/m(P_n \setminus P_2^{(\alpha)})) + 2 \sum_{P_3^{(\beta)} \subset P_n} \mathfrak{F}(P_3^{(\beta)}/m(P_n \setminus P_3^{(\beta)})) +$$

$$+ \ldots + (n-1)\mathfrak{F}(P_n);$$

4) $\mathfrak{T}(P') + \mathfrak{T}(P'') \leqslant \mathfrak{T}(P' \cup P'') + \mathfrak{T}(P' \cap P'')$, *причем равенство достигается лишь при взаимной квазинезависимости P' и P''.*

Доказательство.

1) В самом деле, $\mathfrak{F}(P_n) = \sum_{i=1}^{n} H(\pi_i) - H(m(P_n)) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} H(\pi_i) +$
$+ H(\pi_n) - (H(m(P_{n-1})) + H(\pi_n)) = \mathfrak{F}(P_{n-1}) \geqslant \mathfrak{F}(P_{n-2}) \geqslant$
$\geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{F}(P_2) \geqslant 0.$

2) Для доказательства достаточно показать, что

$$\mathfrak{T}(P_n)//\mathfrak{F}(\{\pi_k \cdot \pi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \pi_n\}) \leqslant \mathfrak{T}(P_n)//\mathfrak{F}(\{\pi_{k+1} \cdot \pi_{k+2} \cdot \ldots \cdot \pi_n\}).$$

Действительно, $\mathfrak{T}(P_n)//\mathfrak{F}(\{\pi_k \cdot \pi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \pi_n\}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} H(\pi_i/\pi_k \cdot \pi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \pi_n) - H(m(P_n)/\pi_k \cdot \pi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \pi_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} H(\pi_i/\pi_k \cdot \pi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \pi_n) + H(\pi_k \cdot \pi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \pi_n) - H(m(P_n)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} H(\pi_i/\pi_{k+1} \cdot \pi_{k+2} \cdot \ldots \cdot \pi_n) + H(\pi_k \cdot \pi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \pi_n) - H(\pi_{k+1} \cdot$$

$$\cdot \pi_{k+2} \cdot \ldots \cdot \pi_n) + H(\pi_{k+1} \cdot \pi_{k+2} \cdot \ldots \cdot \pi_n) - H(m(P_n)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} H(\pi_i/\pi_{k+1} \cdot \pi_{k+2} \cdot \ldots \cdot \pi_n) + H(\pi_{k+1} \cdot \pi_{k+2} \cdot \ldots \cdot \pi_n) - H(m(P_n)) =$$

$$= \mathfrak{F}(P_n)//\mathfrak{F}(\{\pi_{k+1} \cdot \pi_{k+2} \cdot \ldots \cdot \pi_n\}).$$

3) Докажем сперва равенство

$$\mathfrak{T}(P_n)=\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)\sum_{P_k^{(\alpha)}\subset P_n}\mathfrak{J}(P_k^{(\alpha)}/m(P_n\setminus P_k^{(\alpha)})).$$

Имея в виду, что для любого $k\leqslant n$ число различных $P_k^{(\alpha)}\subset P_n$ равно $\binom{n}{k}$, то

$$\sum_{P_k^{(\alpha)}\subset P_n}\mathfrak{J}(P_k^{(\alpha)}/m(P_n\setminus P_k^{(\alpha)}))=\binom{n}{k}\Big[-H(m(P_{n-k}^{(\alpha_0)})+\sum_{\alpha_1=1}^{\binom{k}{1}}H(m(P_{n-k+1}^{(\alpha_1)}))-$$

$$-\sum_{\alpha_2=1}^{\binom{k}{2}}H(m(P_{n-k+2}^{(\alpha_2)}))+\ldots\mp H(m(P_n))\Big].$$

Поэтому

$$\mathfrak{T}(P_n)=\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\alpha_i=1}^{\binom{k}{i}}H(m(P_{n-k+i}^{(\alpha_i)}))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}1/n\sum_{k=n-2}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{n-1}kH(\pi_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-3}\sum_{\alpha=1}^{\binom{n}{i}}1\Big/\binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{i+1}kH(m(P_{n-i}^{(\alpha)}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}kH(m(P_n))=\sum_{j=1}^{n}H(\pi_j)-H(m(P_n)),$$

поскольку $\sum\limits_{k=n-2}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{n-1}k=n$, для $i=1,\ \ldots,\ n-3$ верно

$$\sum_{k=i}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{i+1}k=0 \quad\text{и}\quad \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}k=-1.$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\mathfrak{T}(P_n)=\sum_{P_2^{(\alpha)}\subset P_n}\mathfrak{J}(P_2^{(\alpha)})-\sum_{P_3^{(\beta)}\subset P_n}\mathfrak{J}(P_3^{(\beta)})+\ldots\mp\mathfrak{J}(P_n).$$

4) В самом деле, в силу определения $(\mathfrak{T}(P'\cup P'')+\mathfrak{T}(P'\cap P'')=$
$=\sum\limits_{i\in A'\cup A''}H(\pi_i)-H(m(P'\cup P''))+\sum\limits_{j\in A'\cap A''}H(\pi_j)-H(m(P'\cap P''))=$
$=\sum\limits_{i\in A'}H(\pi_i)-H(m(P'))+\sum\limits_{j\in A''}H(\pi_j)-H(m(P''))+H(m(P'))+$
$+H(m(P''))-H(m(P'\cup P''))-H(m(P'\cap P''))\geqslant\mathfrak{T}(P')+\mathfrak{T}(P'')+$
$+H(m(P'))+H(m(P''))-H(m(P')\cdot m(P''))-H(m(P')+$
$+m(P''))\geqslant\mathfrak{T}(P')+\mathfrak{T}(P'')$.

Далее, $\mathfrak{T}(P')+\mathfrak{T}(P'')=\mathfrak{T}(P'\cup P'')+\mathfrak{T}(P'\cap P'')\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sum\limits_{i\in A'}H(\pi_i)-H(m(P'))+\sum\limits_{j\in A''}H(\pi_j)-H(m(P''))=$
$=\sum\limits_{i\in A'\cup A''}H(\pi_i)-H(m(P'\cup P''))+\sum\limits_{j\in A'\cap A''}H(\pi_j)-H(m(P'\cap P''))\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H(m(P'))+H(m(P''))=H(m(P'\cup P''))+H(m(P'\cap P''))$.

Теорема доказана.

Информационную функцию $\mathfrak{F}(P)$ назовем взаиморазличием (обозначение $\mathfrak{D}(P)$), если только для любой P_n она определена через:

$$\mathfrak{D}(P_n) \underset{\mathrm{Df}}{=} nH(m(P_n)) - \sum_{P^{(\alpha)}_{n-1} \subset P_n} H(m(P^{(\alpha)}_{n-1})).$$

Ясно, что поскольку $m(\varnothing_P) = 1_X$, то $\mathfrak{D}(P_1) = H(\pi_1)$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}(P)$ — неотрицательная симметричная информационная функция, удовлетворяющая при произвольной системе P следующим условиям:*
а) $\mathfrak{F}(P) = \mathfrak{F}(P \cup \{1_x\})$;
б) *из гомогенности P вытекает $\mathfrak{F}(P) = 0$.*
Тогда верно $\mathfrak{F}(P) = C\mathfrak{D}(P)$, где C — некоторая положительная константа.

Доказательство. Пусть P_2 — гомогенная система. Тогда по предположению $2Q^2_1 H(\pi_i) + Q^2_2 H(\pi_i) = 0 \Rightarrow Q^2_2 = -2Q^2_1$. Поэтому в силу $\mathfrak{F}(P_2) \geqslant 0$, принимая $C = -Q_1{}^2$, имеем $\mathfrak{F}(P_2) = C[2H(\pi_1 \cdot \pi_2) - H(\pi_1) - H(\pi_2)] = C\mathfrak{D}(P_2)$. Ясно, что $C > 0$. Итак, теорема верна для P_n при $n = 2$. Поскольку $\mathfrak{F}(\{\pi_1\}) = \mathfrak{F}(\{\pi_1\} \cup \{1_X\})$, то $Q_1{}^1(H(\pi_1) = C(2H(\pi_1) - H(\pi_1) - H(1_X)) = CH(\pi_1) \Rightarrow Q_1{}^1 = C \neq 0$ и поэтому теорема верна и для P_1. Предполагаем теперь, что теорема верна для $n = m - 1$ и покажем, что из этого следует и верность для $n = m$. Из гомогенности P_m вытекает $\mathfrak{F}(P_m) = mQ^m_1 H(\pi_i) + \binom{m}{2} Q^m_2 H(\pi_i) + \ldots + \binom{m}{m} Q^m_m H(\pi_i) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mQ^m_1 + \binom{m}{2} Q^m_2 + \ldots + \binom{m}{m} Q^m_m = 0.$$

Принимая теперь $\pi_m = 1_X$, получаем при произвольной P_{m-1} в силу леммы 1, что
$$\mathfrak{F}(P_m) = \mathfrak{F}(P_{m-1} \cup \{1_X\}) = Q^m_1 \sum_{i=1}^{m-1} H(\pi_i) +$$
$$+ Q^m_2 \left(\sum_{i,j=1}^{m-1} H(\pi_i \cdot \pi_j) + \sum_{i=1}^{m-1} H(\pi_i) \right) + Q^m_3 \left(\sum_{\substack{i,j,h=1 \\ i<j<h}}^{m-1} H(\pi_i \cdot \pi_j \cdot \pi_h) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m-1} H(\pi_i \cdot \pi_j) \right) + \ldots + Q^m_{m-2} \left(\sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{m-2}=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_{m-2}}} H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_{m-2}}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{m-3} \\ i_1<i_2<\ldots<i_{m-3}}}^{m-1} H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_{m-3}}) \right) + Q^m_{m-1} \left(H(\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_{m-1}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{m-2}=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_{m-2}}}^{m-1} H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_{m-2}}) \right) + Q^m_m H(\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_{m-1}) =$$
$$= (Q^m_1 + Q^m_2) \sum_{i=1}^{m-1} H(\pi_i) + (Q^m_2 + Q^m_3) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m-1} H(\pi_i \cdot \pi_j) + \ldots +$$
$$+ (Q^m_{m-1} + Q^m_m) H(\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_{m-1}) =$$
$$= C\left[(m-1) H(\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_{m-1}) - \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{m-2}=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_{m-2}}}^{m-1} H(\pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_{m-2}}) \right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для любого $k = 3, 4, \ldots, m-1$ верно $Q^m_{m-k} + Q^m_{m-k+1} = 0$; $Q^m_{m-2} + Q^m_{m-1} = -C$; $Q^m_{m-1} + Q^m_m = (m-1)C$.

Итак,

$$mQ_1^m+\binom{m}{2}Q_2^m+\ldots+\binom{m}{m}Q_m^m=m(Q_1^m+Q_2^m)+\left(\binom{m}{2}-m\right)Q_2^m+$$

$$+\binom{m}{3}Q_3^m+\ldots+\binom{m}{m}Q_m^m=\left(\binom{m}{2}-m\right)(Q_2^m+Q_3^m)+\left(\binom{m}{3}-\right.$$

$$\left.-\binom{m}{2}+m\right)Q_3^m+\ldots+\binom{m}{m}Q_m^m=\left(\binom{m}{3}-\binom{m}{2}+m\right)(Q_3^m+Q_4^m)+$$

$$+\left(\binom{m}{4}-\binom{m}{3}+\binom{m}{2}-m\right)Q_4^m+\ldots+\binom{m}{m}Q_m^m=$$

$$=\ldots=\left(\binom{m}{m-2}-\binom{m}{m-3}+\binom{m}{m-4}-\ldots\pm m\right)(Q_{m-2}^m+Q_{m-1}^m)+$$

$$+\left(\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-2}+\binom{m}{m-3}-\ldots\pm m\right)Q_{m-1}^m+\binom{m}{m}Q_m^m=0.$$

Из вышеприведенного следует, что:

а) если $m=2n$, то $(2-m)C+2Q_{m-1}^m+Q_m^m=0$;

б) если $m=2n+1$, то $-mC+Q_m^m=0$.

Для случая а) получаем: $(2-m)C+2Q_{m-1}^m+Q_m^m=0\Rightarrow(2-m)C+$ $+(Q_{m-1}^m+Q_m^m)+Q_{m-1}^m=0\Rightarrow(2-m)C+(m-1)C+Q_{m-1}^m=0\Rightarrow$ $Q_{m-1}^m=-C$.

Поэтому $Q_m^m=mC$. Для случая б) получаем: $-mC+Q_m^m=0\Rightarrow$ $\Rightarrow Q_m^m=mC$. Итак, $Q_m^m=mC$, $Q_{m-1}^m=-C$ и для любого $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$ $Q_k^m=0$.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Для любых систем* $P(X)$, $P'(X)$ *и* $P''(X)$ *имеет место:*

1) $\mathfrak{D}(P)=\sum_{i\in A}H(\pi_i/m(P\setminus\{\pi_i\}))$;

2) *из гомогенности* P *следует* $\mathfrak{D}(P)=0$;

3) $\mathfrak{D}(P')+\mathfrak{D}(P'')\geqslant\mathfrak{D}(P'\cup P'')$, *причем равенство достигается при негомогенности* $P'\cup P''$ *лишь для случая* $m(P')\,|\,m(P'')$.

Доказательство. 1) Легко выводится из определения функции $\mathfrak{D}(P)$.

2) Очевидно.

3) Действительно, $\mathfrak{D}(P')+\mathfrak{D}(P'')=\sum_{i\in A'}H(\pi_i/m(P'\setminus\{\pi_i\}))+$

$$+\sum_{j\in A''}H(\pi_j/m(P''\setminus\{\pi_j\}))\geqslant\sum_{i\in A'}H(\pi_i/m((P'\cup P'')\setminus\{\pi_i\}))+$$

$$+\sum_{j\in A''}H(\pi_j/m((P'\cup P'')\setminus\{\pi_j\}))\geqslant\mathfrak{D}(P'\cup P'').$$

Справедливость утверждения для случая взаимной независимости P' и P'' следует из равенства $H(m(P'\cup P''))=H(m(P'))+H(m(P''))$.

Автор выражает глубокую благодарность А. Таутсу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. М., Мир, 1978.
2. *Лаусмаа Т.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1982, **31**, № 4, 390—398.
3. *Лаусмаа Т.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1983, **32**, № 2, 128—134.
4. *McGill, W. J.* // Psychometrika, 1954, **19**, 97—116.
5. *Ashby, W. R.* // Cybernetica, 1965, **8**, 5—22.
6. *Watanabe, S.* // IBM J. Res. Develop., 1960, **4**, № 1, 66—82.
7. *Horibe, Y.* // Inform. and Contr., 1973, **22**, 403—404.
8. *Лаусмаа Т.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1979, **28**, № 4, 338—345.

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/III 1987
Переработанный вариант
23/VI 1988

T. LAUSMAA

INFOFUNKTSIOONID TÜKELDUSTE SÜSTEEMIDEL

On jätkatud töös [2] alustatud tükelduste süsteemi infohinnangute vaatlust, eeldades, et kõik praktilist huvi pakkuvad infohinnangud võib esitada infofunktsioonidena, mis kujutavad endast reaalarvulisi funktsioone tükelduste süsteemidel. On vaadeldud vastastikuse sõltuvuse, mõju ning erinevuse funktsioone ning toodud nende funktsioonide süntees ja põhiomadused, mille kaudu saab tükelduste süsteemile informatiivse iseloomustuse.

T. LAUSMAA

THE INFORMATION FUNCTIONS ON PARTITION SYSTEMS

The present state of development in the design of various finite system objects is characterized by switching over to large-scale use of automatized design systems. This trend presupposes a new approach to the design foundations. As finite discrete objects can be characterized by a subset of the Cartesian product of finite sets [1] which is equivalent to the presentation of an object by a partition system on this product, one possible approach to develop the foundations of automized design systems is to characterize first the object by corresponding partition system and then to estimate it on this basis.

In this paper the investigation of information measures which was started in [2] is carried on. It is supposed that all quantitative measures for partition systems important for practical purposes are presented by information functions on partition systems. There are three basic information functions on which investigation and synthesis are carried out in this paper. These are functions of interaction, interdependence and interdifference. All these functions characterize various aspects of a partition system relevant to design purposes of an object presented by this partition system.