EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 3

УДК 517.988 : 519.615

О. ВААРМАНН

О МЕТОДАХ ТИПА КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ

(Представил Н. Алумяэ)

Пусть дано уравнение

$$F(x)=0, \tag{1}$$

где дважды дифференцируемый оператор $F(x)$ действует из одного банахова пространства X в другое Y. Для решения этого уравнения можно применить метод касательных гипербол

$$x_{k+1}=x_k-Q_k^{-1}\Gamma_k F(x_k), \quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где

$$\Gamma_k=[F'(x_k)]^{-1} \quad \text{и} \quad Q_k=I-\frac{1}{2}\Gamma_k F''(x_k)\Gamma_k F(x_k). \tag{2}$$

Однако во многих случаях применение основного метода (2) нецелесообразно из-за трудоемкости вычисления второй производной $F''(x)$. Поэтому представляют интерес модификации метода (2), в которых вместо оператора $F''(x)$ используется его некоторая вычисляемая просто аппроксимация.

Целью настоящей работы является исследование общих схем итерационных методов третьего порядка, включающих как уже известные, так и новые алгоритмы типа (2). Изучаются варианты метода (2), в которых вместо операторов $F''(x)$, $Q^{-1}(x)$ и $\Gamma(x)$ используются некоторые их приближения. В частности, эти вопросы изучены в работах [1-7].

Если выражение $F''(x)(y-x)$ заменить на $L(x, y-x)$, которая аппроксимирует $F''(x)(y-x)$ в рассматриваемой области S, $x, y\in S$, и вместо $\Gamma(x)$ использовать также некоторое его приближение, то метод (2) превращается в метод

$$x_{k+1}=x_k-\left[F'(x_k)+\frac{1}{2}L(x_k,\ y_k-x_k)\right]^{-1}F(x_k) \tag{3}$$

или

$$x_{k+1}=x_k-U_k^{-1}A_kF(x_k), \tag{4}$$

где $U_k=A_kF'(x_k)+\dfrac{1}{2}A_kL(x_k,\ y-x_k)$, $y_k-x_k=-A_kF(x_k)$.

Если вместо U_k^{-1}, в свою очередь, принять приближенный к нему оператор V_k, то получается

$$x_{k+1}=x_k-V_kA_kF(x_k), \quad k=0,\ 1,\ \ldots. \tag{5}$$

1. В дальнейшем предполагается существование и ограниченность операторов $[F'(x)]^{-1}$ и $U^{-1}(x)$. Если при этом $\gamma_k<1$ и $\bar{\gamma}_k<1$ (см.

ниже), то по теореме Банаха существуют также ограниченные операторы A_k^{-1} и V_k^{-1}.

Введем последовательности чисел $\{\gamma_k\}$, $\{\bar\gamma_k\}$, $\{\eta_k\}$ и постоянные λ, Λ, M, M_1 и H, удовлетворяющие неравенствам

$$\|I-A_kF'(x_k)\|\leqslant\gamma_k,\quad \|I-V_kU_k\|\leqslant\bar\gamma_k,\quad \|V_kA_kF(x_k)\|\leqslant\eta_k, \tag{6}$$

$$\|F'(x)\|\leqslant M,\quad \|F''(x)\|\leqslant K,\quad \|A_k\|\leqslant\lambda,\quad \|V_k\|\leqslant\Lambda, \tag{7}$$

$$\|V_k^{-1}\|\leqslant M_1,\quad \|A_{k+1}A_k^{-1}\|\leqslant H,\quad k=0,\,1,\,\ldots \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $x_0\in X$, $S=\{x\in X\colon \|x-x_0\|\leqslant\varrho\}$ и на S выполнены следующие условия:*

1° *оператор $F(x)$ дважды дифференцируем (по Фреше);*

2° *вторая производная $F''(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F''(x)-F''(y)\|\leqslant L_2\|x-y\|\qquad (x,y\in S);$$

3° $\|F''(x)(y-x)-L(x,y-x)\|\leqslant G\|x-y\|^2,\quad \|L(x,y-x)\|\leqslant \leqslant G_1\|x-y\|,\quad (G,G_1<\infty)$;

4° *существуют $\Gamma(x)$, $U^{-1}(x)$ и $\|\Gamma(x)\|\leqslant C$, $\|U^{-1}(x)\|\leqslant C_1$, $(C,C_1<\infty)$;*

5° $\delta=\delta_0<1$ *(ниже величина δ_0 определяется по разному в случаях 1)—3)).*

Тогда:

1) *Если $\gamma_k\leqslant\gamma_0<1$, $\bar\gamma_k\leqslant\gamma_0<1$ и $r_1=\eta_0/(1-\delta_0)\leqslant\varrho$, то уравнение* (1) *имеет в S решение x^*, к которому сходится последовательность* (5), *причем $\|x^*-x_0\|\leqslant r_1$ и*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\delta^k,$$

где $\delta_0=\Lambda\Big[HM_1\bar\gamma_0+\frac{1}{2}\lambda K(\gamma_0+M_1\bar\gamma_0)\eta_0+\frac{1}{2}\lambda\Big(GM_1+\frac{1}{2}\lambda KG_1M_1+ +\frac{1}{3}L^2\Big)\eta_0^2\Big]$. Если $\bar\gamma_0\geqslant\bar\gamma_1\geqslant\ldots\geqslant\bar\gamma_k\geqslant\ldots\geqslant0$ *и* $\bar\gamma_k\to0$ *при* $k\to\infty$, *то со сверхлинейной скоростью*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\prod_{i=0}^{k-1}\delta_i,$$

$$\text{где}\quad \delta_i=\Lambda\Big[HM_1\bar\gamma_i+\frac{1}{2}\lambda K(\gamma_i+M_1\bar\gamma_i)\eta_i+\frac{1}{2}\lambda\Big(GM_1^2+\frac{1}{2}\lambda KG_1M_1+\frac{1}{3}L_2\Big)\eta_i^2\Big].$$

2) *Если $\bar\gamma_k=C_2\|x_{k+1}-x_k\|$, $C_2<\infty$ и $\gamma_k<1$, но γ_k не является бесконечно малой величиной порядка $O(\|x_{k+1}-x_k\|)$ и $r_2=H_0(\delta)/d\leqslant\varrho$, где* $H_k(\delta)=\sum_{i=k}^{\infty}\delta^{2^i}$, $\delta=\delta_0=\eta_0d_0$, $d=\lim_{k\to\infty}d_k$, $d_k=\Lambda\Big\{\frac{1}{2}\lambda\Big[K\gamma_k+\Big(GM_1^2+ +\frac{1}{2}\lambda KG_1M_1+\frac{1}{3}L_2\Big)\eta_k\Big]+HM_1C_2\eta_k+\frac{1}{2}\lambda KM_1C_2\eta_k^2\Big\}$, *то уравнение* (1) *имеет в S решение x^*, к которому сходится последовательность* (5), *причем $\|x^*-x_0\|\leqslant r_2$ и*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant H_k(\delta)/d.$$

3) *Если* $\bar\gamma_k=C_2\|x_{k+1}-x_k\|^2$, $\gamma_k=C_3\|x_{k+1}-x_k\|$ *и* $r_3=H_0(\delta)/d\leqslant\varrho$, $\delta_0=\eta_0\sqrt{d_0}$, *где* $d_k=d+\frac{1}{2}\lambda\Lambda KM_1C_2\eta_k$, $d=\Lambda\Big[HM_1C_2+\frac{1}{2}\lambda KC_3+ +\frac{1}{2}\lambda\Big(GM_1^2+\frac{1}{2}\lambda KG_1M_1+\frac{1}{3}L_2\Big)\Big]$,

то последовательность (5) *сходится с кубичной скоростью сходимости к решению* x^* *уравнения* (1), *причем* $\|x^*-x_0\|\leqslant r_3$ *и*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant H_k(\delta)/\sqrt{d},\quad H_k(\delta)=\sum_{i=k}^{\infty}\delta^{3^i}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора

$$F(x_{k+1})=A_k^{-1}V_k^{-1}(V_kU_k-I)(x_{k+1}-x_k)+R_k,$$

где

$$R_k=\frac{1}{2}\{[F''(x_k)(y_k-x_k)-L(x_k,y_k-x_k)](x_{k+1}-x_k)+$$

$$+F''(x_k)(y_k-x_{k+1})(x_{k+1}-x_k)\}+\int_0^1[F''(x_k+t(x_{k+1}-x_k))-\tag{9}$$

$$-F''(x_k)](x_{k+1}-x_k)^2(1-t)\,dt.$$

Далее,

$$x_{k+1}-y_k=x_{k+1}-x_k-V_k^{-1}(x_{k+1}-x_k)=$$

$$=[I-U_k+V_k^{-1}(V_kU_k-I)](x_{k+1}-x_k).\tag{10}$$

С учетом (4), (9) и (10) имеем

$$\|I-U_k\|\leqslant\gamma_k+\frac{1}{2}\|A_kL(x_k,y_k-x_k)\|\leqslant\gamma_k+\frac{1}{2}\lambda G_1\|y_k-x_k\|\leqslant$$

$$\leqslant\gamma_k+\frac{1}{2}\lambda G_1M_1\|x_{k+1}-x_k\|,$$

$$\|x_{k+1}-x_k\|=\|V_kA_kF(x_k)\|\leqslant\|V_k\|\Big[\bar{\gamma}_{k-1}\|A_kA_{k-1}\|\,\|V_{k-1}^{-1}\|\,\|x_k-x_{k-1}\|+$$

$$+\frac{1}{2}\|A_{k-1}\|(\gamma_{k-1}K+\bar{\gamma}_{k-1}K\|V_{k-1}^{-1}\|)\|x_k-x_{k-1}\|^2+\frac{1}{2}\|A_{k-1}\|\Big(\frac{1}{2}\lambda KG_1\|V_{k-1}^{-1}\|+$$

$$+G\|V_{k-1}^{-1}\|^2+\frac{1}{3}L_2\Big)\|x_k-x_{k-1}\|^3\Big].\tag{11}$$

1) Если $\bar{\gamma}_k\leqslant\bar{\gamma}_0<1$ и $\gamma_k\leqslant\gamma_0<1$, то $\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\delta_{k-1}\|x_k-x_{k-1}\|$, где

$$\delta_{k-1}=\Lambda\Big[HM_1\bar{\gamma}_{k-1}+\frac{1}{2}\lambda K(\gamma_{k-1}+M_1\bar{\gamma}_{k-1})\eta_{k-1}+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\Big(GM_1^2+\frac{1}{2}\lambda KG_1M_1+\frac{1}{3}L_2\Big)\eta_{k-1}^2\Big]$$

и для $n\geqslant k$

$$\|x_n-x_k\|\leqslant\sum_{i=k}^{n-1}\|x_{i+1}-x_i\|\leqslant\|x_1-x_0\|\sum_{i=k}^{n-1}\delta^i=r_1(\delta^k-\delta^n).$$

Таким образом, последовательность (5) фундаментальна, и справедливы следующие соотношения

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_k,\quad F(x^*)=0,\quad\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\delta^k,\quad r_1=\eta_0/(1-\delta),$$

$$\|x_k-x_0\|\leqslant r_1(1-\delta^k)\leqslant r_1\leqslant\varrho,\quad\text{т. е. все } x_k\in S.$$

Перейдем теперь к доказательству случаев 2) и 3). Допустим, что

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant d_{k-1}\|x_k-x_{k-1}\|^p \quad (p\geqslant 2),$$

где

$$d_0\geqslant d_1\geqslant\ldots\geqslant d_k\geqslant\ldots>0,\quad \lim_{k\to\infty} d_k=d,$$

тогда имеет место

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant d_{k-1}\|x_k-x_{k-1}\|^p\leqslant d^{-\frac{1}{p-1}}\left(d_{k-1}^{\frac{1}{p-1}}\eta_{k-1}\right)^p\leqslant\ldots\leqslant d^{-\frac{1}{p-1}}\delta^{p^k},$$

$$\|x_n-x_k\|\leqslant d^{-\frac{1}{p-1}}[H_k(\delta)-H_n(\delta)] \quad (n\geqslant k),$$

где $\delta=\eta_0 d_0^{\frac{1}{p-1}}$, $H_k(\delta)=\sum_{i=k}^{\infty}\delta^{p^i}$; т. е. последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна. Следовательно,

$$x^*=\lim_{k\to\infty} x_k,\quad F(x^*)=0,\quad \|x_k-x^*\|\leqslant d^{-\frac{1}{p-1}}H_k(\delta),$$

$$\|x_0-x^*\|\leqslant d^{-\frac{1}{p-1}}H_0(\delta).$$

В частности, если $\overline{\gamma}_{k-1}=C_2\|x_k-x_{k-1}\|^2$, а γ_{k-1} не является малой величиной порядка $O(\|x_k-x_{k-1}\|)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} d_k=d>0$, то из (11) следует, что $\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant d_{k-1}\|x_k-x_{k-1}\|^2$,

где $$d_{k-1}=\Lambda\left\{\frac{1}{2}\lambda\left[K\gamma_{k-1}+\left(GM_1^2+\frac{1}{2}\lambda KG_1M_1+\frac{1}{3}L_2\right)\eta_{k-1}\right]+\right.$$
$$\left.+HM_1C_2\eta_{k-1}+\frac{1}{2}\lambda KM_1C_2\eta_{k-1}^2\right\}$$

и

$$H_k(\delta)=\sum_{i=k}^{\infty}\delta^{2^i}.$$

В случае $\overline{\gamma}_{k-1}=C_2\|x_k-x_{k-1}\|^2$, $\gamma_{k-1}=C_3\|x_k-x_{k-1}\|$ имеем

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant d_{k-1}\|x_k-x_{k-1}\|^3,\quad \text{где}\quad d=\Lambda\left[HM_1C_2+\frac{1}{2}\lambda KC_3+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\lambda\left(GM_1^2+\frac{1}{2}\lambda KG_1M_1+\frac{1}{3}L_2\right)\right],\quad d_{k-1}=d+\frac{1}{2}\lambda\Lambda KM_1C_2\eta_{k-1}.$$

2. Теорема 1 позволяет не только обсудить устойчивости (в смысле сохранения порядка скорости сходимости), а также изучить важные с точки зрения практики виды метода (5).

В [4] предлагается в качестве $L(x_k, y_k-x_k)$ брать

$$2\beta\left[F'\left(x_k-\frac{1}{2\beta}\Gamma_kF(x_k)\right)-F'(x_k)\right].$$

Если в этом выражении принять $\beta=1$ и в формуле (5) положить $A_k=\Gamma_k$ и $V_k=Q_k^{-1}$, где $Q_k=\Gamma_kF'\left(x_k-\frac{1}{2}\Gamma_kF(x_k)\right)$, то из (5) получается метод, рассмотренный Т. И. Коган [7]

$$x_{k+1}=x_k-\left[F'\left(x_k-\frac{1}{2}\Gamma_kF(x_k)\right)\right]^{-1}F(x_k),\quad k=0,1,\ldots \tag{12}$$

Если в методе (12) заменить Γ_k на $[F'(\theta_{k-1})]^{-1}$ и $\left[F'\left(x_k-\frac{1}{2}\Gamma_kF(x_k)\right)\right]^{-1}$ на $[F'(\theta_k)]^{-1}$, где

$$\theta_k=\begin{cases}x_0, & \text{при}\quad k=0\\ x_k-\frac{1}{2}[F'(\theta_{k-1})]^{-1}F(x_k), & \text{при}\quad k\geqslant 1,\end{cases}$$

то (12) превращается в метод

$$x_{k+1}=x_k-[F'(\theta_k)]^{-1}F(x_k) \tag{13}$$

с порядком $1+\sqrt{2}$. В самом деле,

$$\|I-A_kF'(x_k)\|\leqslant\|[F'(\theta_{k-1})]^{-1}(F'(\theta_{k-1})-F'(x_k)\|\leqslant CK\|x_k-\theta_{k-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant CK\left(\|x_k-x_{k-1}\|+\frac{1}{2}\|[F'(\theta_{k-2})]^{-1}F'(\theta_{k-1})\|\,\|[F'(\theta_{k-1})]^{-1}F(x_{k-1})\|\right),$$

т. е. $\gamma_k=0(\|x_k-x_{k-1}\|)$.

С учетом того, что $U_k=A_kF'\left(x_k-\frac{1}{2}A_kF(x_k)\right)$ и $V_k=U_k^{-1}=[F'(\theta_k)]^{-1}A_k^{-1}$, имеем $\|I-V_kU_k\|=0$, т. е. $\bar{\gamma}_k=0$.

Далее, из (11) следует, что доминирующим является член $\frac{1}{2}\Lambda K\gamma_{k-1}\|x_k-x_{k-1}\|^2$ порядка $O(\|x_{k-1}-x_{k-2}\|\,\|x_k-x_{k-1}\|^2)$, и поэтому скорость сходимости метода (13) равна $1+\sqrt{2}$ [8].

По-видимому, метод (13) впервые предложен М. Я. Бартишем [9], позже рассмотрен в [10–15].

Применение метода (13) равносильно решению на каждом шаге итерации возмущенных линейных уравнений

$$(F'(x_k)+E_k)t_k=-F(x_k), \tag{14}$$

$$F'\left(x_k+\frac{1}{2}t_k\right)\tau_k=-F(x_k), \tag{15}$$

где $x_{k+1}=x_k+\tau_k$ и $E_k=[F'(\theta_{k-1})]^{-1}-F'(x_k)$, а применение метода (12) эквивалентно решению (14), (15) при $E_k=0$. Если при реализации метода (13) использовать схему с вычислением обратного оператора, то на каждом шаге итерации требуется приблизительно такой же объем вычислений, как и при методе Ньютона.

На основе изложенного выше заключаем, что для сохранения порядка, присущего методу Ньютона или методу (13), следует вычислить обратные операторы или соответствующие линейные уравнения с точностью $O(\delta^{2^k})$ или $O(\delta^{(1+\sqrt{2})^k})$. При решении на каждом шаге итерации линейных уравнений с помощью некоторого итерационного метода для сохранения порядка метода (12) (метода (13)) достаточно решить уравнение (14) с точностью порядка $O(\|x_{k+1}-x_k\|)$ $(O(\|x_k-x_{k-1}\|))$, а уравнение (15) с точностью $O(\|x_{k+1}-x_k\|^2)$ $(O(\|x_k-x_{k-1}\|\,\|x_{k+1}-x_k\|))$ (см. также [1]).

В частности, для решения уравнений (14), (15) можно использовать двупараметрический итерационный метод [16–18]

$$x_{k+1}=x_k-\varepsilon_k(2\alpha_k[F'(x_k)]^*-\alpha_k^2[F'(x_k)]^*F'(x_k)[F'(x_k)]^*)F(x_k). \quad (16)$$

Удобный способ определения параметров $h_1^{(k)}$ и $h_2^{(k)}$ ($h_1^{(k)}=2\varepsilon_k\alpha_k$, $h_2^{(k)}=\varepsilon_k\alpha_k^2$) предложен в [18]. Там же показано, что метод (16) эффективнее метода Фридмана в смысле как количества итераций, так и машинного времени.

При решении систем нелинейных уравнений полезно в некоторых случаях (желательно иметь $\Gamma(x)$ в явном виде, распараллеливать вычисления и т. д.) использовать модификации метода (12), в которых Γ_k или $\Gamma_{k-\frac{1}{2}}$ $\left(\Gamma_{k-\frac{1}{2}}=\left[F'\left(x_k-\frac{1}{2}\Gamma_kF(x_k)\right)\right]^{-1}\right)$ вычисляются точно на некоторых шагах или этапах итерации, а на промежуточных шагах или этапах применяется формула итеративного обращения матрицы.

Например, метод (12) можно модифицировать следующим образом:

$$y_k=x_k-\frac{1}{2}\Gamma_kF(x_k),$$

$$x_{k+1}=x_k-[3\Gamma_k-3\Gamma_kF'(y_k)\Gamma_k+\Gamma_k(F'(y_k)\Gamma_k)^2]F(x_k), \quad (17)$$

или

$$y_0=x_0-\frac{1}{2}\Gamma_0F(x_0),$$

$$x_1=x_0-\Gamma_{0-\frac{1}{2}}F(x_0),$$

$$y_k=x_k-\frac{1}{2}\Gamma_{(k-1)-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{q-1}\left(I-F'(x_k)\Gamma_{(k-1)-\frac{1}{2}}\right)^iF(x_k), \quad q\geqslant 2, \quad (18)$$

$$x_{k+1}=x_k-\Gamma_{k-\frac{1}{2}}F(x_k), \quad k\geqslant 1.$$

Для метода (13) получим аналогично

$$x_{k+1}=x_k-A_{k+1}F(x_k), \quad A_{k+1}=[F'(\theta_k)]^{-1},$$

$$\theta_{k+1}=x_{k+1}-\frac{1}{2}A_{k+1}F(x_{k+1}),$$

$$x_{k+2}=x_{k+1}-A_{k+1}\sum_{i=0}^{p-1}(I-F'(\theta_{k+1})A_{k+1})^iF(x_{k+1}), \quad (19)$$

$$\theta_{k+2}=x_{k+2}-\frac{1}{2}A_{k+1}\sum_{i=0}^{q-1}(I-F'(\theta_{k+1}A_{k+1})^iF(x_{k+2}), \quad (p,q\geqslant 2).$$

Расчеты по методу Ньютона и по методам (12), (17)—(19) были проведены на наборе тестовых задач, который содержит комплект тест-задач Аргонского Национального Центра, задачу Фрейденштейна—Рота и задачу Бокса [19]. Счет велся на ЭВМ ЕС 1060 с удвоенной точностью до тех пор, пока не достигалась точность $\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant 10^{-6}$ или $\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant 10^{-9}$. Программы были составлены на языке ФОРТРАН. Результаты численных экспериментов с условием окончания расчетов $\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant 10^{-9}$ приведены в таблице.

Номер задачи	Метод Ньютона	Метод (12)	Метод (13)	Метод (17)	Метод (18) $q=3$	Метод (19) $p=q=3$
1	3	2	3	2	2	3
2	32	21	27	21	22	42
3	13	9	12	9	10	13
4	15	28	14	24	37	16
5	11	6	—	8	—	—
6($N=6$)	13	9	15	9	9	110
6($N=9$)	14	10	16	11	10	—
7	6	4	6	5	4	—
8	91	$K>300$	2	—	3	—
9	4	3	4	3	3	5
10($N=1$)	4	3	4	3	3	5
10($N=10$)	4	3	4	3	3	5
11	8	7	12	$K>300$	$K>300$	—
12	15	10	13	10	11	12
13	5	4	5	4	4	7
14	7	5	6	5	5	9
15	43	25	10	60	49	17
16	6	4	5	4	4	8

N — размерность задачи, прочерк — процесс не сходился, $K>300$ — число итераций превышало 300.

Автор благодарит Вильве Кулла за проведение расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ваарманн О.* О некоторых итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратных и псевдообратных операторов. Автореф. канд. дис. Таллин, 1970.
2. *Вержбицкий В. М., Цалюк З. Б.* Ж. вычисл. мат. и мат. физ., **12**, № 1, 222—227 (1972).
3. *Бартиш М. Я., Сеньо П. С.* Вычисл. и прикл. математика, вып. 28, 85—93 (1976).
4. *Щербина Ю. Н.* Вестн. Львовского ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 11, 66—70 (1976).
5. *Бельтюков Б. А., Зыкова З. П.* В кн.: II симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Хаапсалу, 4—7 июня 1981 г. Доклады и сообщения. Ч. I. Таллин, «Валгус», 1981, 12—17.
6. *Райзман А. И.* В кн.: II симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Хаапсалу, 4—7 июня 1981 г. Доклады и сообщения. Ч. I. Таллин, «Валгус», 1981, 101—103.
7. *Коган Т. И.* Сиб. мат. журн., **8**, № 4, 958—960 (1967).
8. *Schmidt, J. W.* Z. angew. Math. und Mech., **B. 43**, № 3, 97—110 (1963).
9. *Бартиш М. Я.* ДАН УССР. Сер. А, № 5, 387—391 (1968).
10. *Laasonen, P.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., 450 (1969).
11. *King, R. F.* Numer. Math., **18**, 298—304 (1972).
12. *Werner, W.* Numer. Math., **32**, 333—342 (1979).
13. *Werner, W.* Numer. Math., **38**, 383—392 (1982).
14. *Щербина Ю. Н.* Исследование некоторых итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений. Автореф. канд. дис. Львов, 1975.
15. *Роман Л. Л.* В кн.: III симпозиум «Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации». Доклады и сообщения. Таллин, «Валгус», 1984, 90—91.
16. *Ваарманн О.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **19**, № 3, 265—274 (1970).
17. *Ваарманн О.* В кн.: II симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Хаапсалу, 4—7 июня 1981 г. Доклады и сообщения. Ч. I. Таллин, «Валгус», 1981, 18—26.
18. *Măruşter, Şt.* On the two-step gradient method for nonlinear equations. Seminarul de Informatică Şi Analiză Numerică. Timişoara, Universitatea Din Timişoara, Nr. 20, 1985.
19. *Moré, J. J., Garbow, B. S., Hillström, K. E.* ACM. Trans. Math. Software, **7**, 17—41 (1981).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24/XI 1986

O. VAARMANN

PUUTUVATE HÜPERBOOLIDE TÜÜPI MEETODITEST

Mittelineaarse operaatorvõrrandi $F(x)=0$ lahendamiseks Banachi ruumis vaadeldakse puutuvate hüperboolide meetodi (2) selliseid modifikatsioone, kus operaatorite $F''(x)$, $Q(x)$, $\Gamma(x)$ asemel kasutatakse nende aproksimatsioone. On tõestatud koonduvusteoreem seda tüüpi iteratsioonimeetodite kohta, mis on tuletatud mitmel erineval viisil. On toodud tingimused, mille täidetuse korral vaadeldavad meetodid säilitavad neile omase koonduvuskiiruse järgu. Teoreetiliste tulemuste illustreerimiseks on lahendatud 16 näitülesannet.

O. VAARMANN

ON METHODS OF TANGENT HYPERBOLS TYPE

For solving the equation $F(x)=0$, where $F(x)$ is twice differentiable mapping from a Banach space into another, one considers inexact methods of tangent hyperbols (2) and such where the operators $F''(x)$, $Q(x)$ and $\Gamma(x)$ are replaced by their approximations. A local convergence theorem is proved for a family of inexact methods of tangent hyperbols derived by variational means. This theorem, too, states conditions under which methods preserve their convergence rate. As an illustration of new variants of method (2), numerical results of solving 16 test problems are presented.