EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1987.3.03

УДК 514.75

М. ВЯЛЬЯС

ОБ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ В КОНФОРМНО ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представил Г. Вайникко)

§ 1. Введение и результаты

1. Конформно плоские подмногообразия в конформно плоских римановых многообразиях привлекают внимание исследователей с начала XX века до наших дней. Основным отправным результатом является теорема Картана—Схоутена [1, 2], по которому гиперповерхность V_n $(n>3)$ в евклидовом пространстве E_{n+1} является конформно плоской тогда и только тогда, когда ее вторая фундаментальная форма имеет собственное значение кратности $\geqslant n-1$, т. е. когда ее главные кривизны $k_1, \ldots, k_n$ обладают свойством $k_1 = \ldots = k_{n-1}$. Такие гиперповерхности называются квазиомбилическими (см. [3]). В [4] выяснено, что они представляют собой либо гиперсферы, либо огибающие однопараметрических семейств гиперсфер.

Конформно плоские подмногообразия V_n коразмерности $m>1$ в конформно плоском римановом многообразии V_{n+m} рассматривались в [5], где для случая $n>3$ даны аналитические необходимые и достаточные условия, чтобы V_n в таком V_{n+m} было конформно плоским. В [6] этот результат распространен на случай $n=3$.

Один интересный подкласс конформно плоских подмногообразий V_n составляют вполне квазиомбилические подмногообразия V_n $(n>3)$ конформно плоского V_{n+m} (см. [3] гл. 5; [7]). Подмногообразие V_n риманова пространства V_{n+m} называется вполне квазиомбилическим, если в некоторой окрестности каждой его точки существуют m попарно ортогональных нормальных векторных полей, таких, что V_n квазиомбилическое относительно каждого из них. Известно (см. [3]), что вполне квазиомбилическое подмногообразие $V_n (n>3)$ в конформно плоском V_{n+m} является конформно плоским.

2. Теорема Картана—Схоутена обобщена в [8] на случай подмногообразия V_n с плоской нормальной связностью (т. е. с сетью линий кривизны) при размерности $n>3$ и коразмерности $m>1$ в конформно плоском V_{n+m}. Главные кривизны гиперповерхности заменяются при этом главными векторами кривизны, т. е. векторами нормальной кривизны $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$ линий кривизны рассматриваемого подмногообразия (см. § 2).

Теорема 1. (см. [8]). *Пусть V_n является подмногообразием размерности $n>3$ с плоской нормальной связностью в конформно пло-*

ском V_{n+m}. Тогда V_n является конформно плоским тогда и только тогда, когда

$$\langle \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_q,\ \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_s \rangle = 0 \qquad (1)$$

при различных значениях индексов p, q, r, s. В случае $m<n-2$ конформно плоское V_n, удовлетворяющее этим условиям, является вполне квазиомбилическим.

Известно, что вектором нормальной кривизны в направлении $\mathbf{f}=\sum_{i=1}^{n}\varphi^i \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — единичные касательные векторы линий кривизны, является вектор $\mathbf{k}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{k}_i(\varphi^i)^2$. Его конец в точке $X\in V_n$ описывает индикатрису кривизны [9], которая является выпуклой оболочкой множества точек $K_1, \ldots, K_n$ с радиус-векторами $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$. Если нормальное пространство $T_X{}^{\perp}(V_n)$ имеет размерность $m\geqslant n-1$ и точки $K_1, \ldots, K_n$ находятся в общем положении, тогда индикатриса кривизны является симплексом. Этот симплекс обозначим через Δ_X.

Симплекс в евклидовом пространстве E_m называется ортоцентрическим, если все его высоты пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром. Для этого необходимо и достаточно, чтобы направления всех двух его неприлежащих ребер были ортогональны [10]. Частным случаем является прямоугольный симплекс, у которого существует одна вершина, называемая особой, причем исходящие из нее ребра попарно ортогональны; в этом случае орто-центром является эта особая вершина.

Аффинную оболочку точек $K_1, \ldots, K_n$ в пространстве $T_X^{\perp}(V_n)$ обозначим через $A_X(K_1, \ldots, K_n)$, его размерность через m_1. Ясно, что $m_1\leqslant n-1$.

Ниже утверждения теоремы 1 расширяются и уточняются следующим образом. Достаточное условие $m<n-2$ вполне квазиомбиличности заменяется более слабым условием $m_1<n-2$, а метод доказательства, примененный в [8], — более геометрическим способом доказательства. Для случая $m_1\geqslant n-2$ дается геометрическое толкование условия (1). В итоге получена следующая теорема, доказанная в § 2.

Теорема 2. *Пусть $V_n(n>3)$ является конформно плоским подмногообразием с плоской нормальной связностью в конформно плоском V_{n+m}. Если на него $m_1<n-2$, то $n-m_1$ главных векторов кривизны совпадают между собой и определяют особую вершину прямоугольного симплекса, являющегося индикатрисой нормальной кривизны, а само V_n является вполне квазиомбилическим. Если в точке $X\in V_n$ имеет место $m_1\geqslant n-2$, то либо $m_1=n-1$ и индикатриса нормальной кривизны в этой точке является ортоцентрическим симплексом, либо $m_1=n-2$ и эта индикатриса является выпуклой оболочкой ортоцентрического симплекса и его ортоцентра.*

3. Основная часть настоящей статьи посвящена выяснению вопроса, поставленного в [7], могут ли среди конформно плоских подмногообразий $V_n(n>3)$ с плоской нормальной связностью в конформно плоском V_{n+m} существовать такие V_n, которые не являются вполне квазиомбилическими. Ниже приведены новые примеры, которые позволяют изучить этот вопрос. Они найдены среди изотермических подмногообразий, которые, как оказывается, составляют другой интересный подкласс конформно плоских подмногообразий V_n с плоской нормальной связностью в конформно плоском V_{n+m}, наряду с вполне квазиомбилическими.

Изометрические гиперповерхности в E_{n+1} были введены в [11, 12] как естественные обобщения классических изотермических поверхностей в

E_3. Они допускают дальнейшее обобщение в классе подмногообразий с плоской нормальной связностью следующим образом.

Атлас локальных карт на конформно плоском V_n называется изотермическим, если в его любой карте

$$ds^2 = e^{-2\sigma}(du_1^2 + \ldots + du_n^2), \tag{2}$$

где σ — некоторая гладкая функция на области этой карты.

Определение. *Изотермическим называется всякое конформно плоское подмногообразие V_n с плоской нормальной связностью в конформно плоском пространстве V_{n+m}, которое обладает таким изотермическим атласом, что сеть координатных линий каждой карты этого атласа является сетью линий кривизны этого подмногообразия V_n.*

Класс изотермических подмногообразий V_n в конформно плоском V_{n+m} обозначим через $I_{(n,m)}$. Этот класс непустой. Ниже в § 3 найдена система пфаффовых уравнений, определяющая подмногообразие $V_n \in I_{(n,m)}$ самого общего типа, и доказана ее совместность (предложение 1). Класс изотермических подмногообразий V_n в V_{n+m} с попарно различными главными векторами кривизны обозначим через $I^{(n)}_{(n,m)}$. В этом классе существует непустой подкласс, состоящий из подмногообразий, главные векторы кривизн которых параллельны в нормальной связности вдоль соответствующих им линий кривизны (§ 3, предложение 2). Этот подкласс тесно связан с подмногообразиями, которые обладают следующими интересными геометрическими свойствами.

Подмногообразие V_n с плоской нормальной связностью в E_{n+m}, все линии кривизны которого окружности (плоскости которых для линий каждого семейства либо имеют общую прямую, либо параллельны между собой), будем называть подмногообразием Дюпена—Маннгейма (в частном случае $m=1$ они были рассмотрены в [11, 12]).

Подмногообразие V_n с плоской нормальной связностью в E_{n+m}, все главные векторы кривизны которого параллельны в нормальной связности, называется изопараметрическим (см. [13, 14]).

Имеют место следующие теоремы, доказываемые в § 3 и 4.

Теорема 3. *Если $V_n \in I^{(n)}_{(n,n-2)}$ $(n \geqslant 3)$, то все его главные векторы кривизны параллельны в нормальной связности вдоль соответствующих им линий кривизны.*

Теорема 4. *Подмногообразие V_n класса $I^{(n)}_{(n,m)}$ $(n \geqslant 3)$, главные векторы кривизны которого параллельны в нормальной связности вдоль соответствующих им линий кривизны, является объединением замыканий своих областей, отображающихся локальными конформными отображениями V_{n+m} в E_{n+m}*

1) *при отличных от нуля главных векторах кривизны: на подмногообразие Дюпена—Маннгейма,*

2) *при одном главном векторе кривизны, равным нулю:*

а) *на конус, который проектирует $(n-1)$-мерную обобщенную поверхность Клиффорда из центра содержащей ее гиперсферы, либо*

б) *на изопараметрический цилиндр над произведением $(n-1)$ окружностей, т. е. предельный случай предыдущего, когда вершина конуса удаляется в бесконечность.*

§ 2. Доказательство теоремы 2

1. Пусть V_n является подмногообразием с плоской нормальной связностью в конформно плоском V_{n+m}. Так как сеть его линий кривизны и понятие изотермичности сети конформно инвариантны, то при локальных рассмотрениях, используя известный прием (см. [15]), можно без ограничения общности конформно плоское V_{n+m} заменить на евклидово пространство E_{n+m}.

Пусть V_n является изотермическим подмногообразием в E_{n+m}. Оно является базой своего касательного векторного расслоения $T(V_n)$ и нормального векторного расслоения $T^\perp(V_n)$. Слоями этих расслоений являются соответственно касательное пространство $T_X(V_n)$ и нормальное пространство $T_X{}^\perp(V_n)$ как векторные подпространства в $T_X(E_{n+m})$. Присоединим к любой точке $X\in V_n$ ортонормированный подвижный репер так, чтобы множества векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{n+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+m}\}$ были базисами соответственно в $T_X(V_n)$ и в $T_X{}^\perp(V_n)$, причем векторы первого базиса были касательными к линиям кривизны. В формулах инфинитезимального перемещения репера

$$d\mathbf{x}=\mathbf{e}_J\omega^J, \quad d\mathbf{e}_K=\mathbf{e}_J\omega^J_K; \quad J, K=1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m, \tag{3}$$

имеем $\omega^K_J=-\omega^J_K$, $d\omega^J=\omega^K\wedge\omega^J_K$, $d\omega^J_K=\omega^L_K\wedge\omega^J_L$, и в данном случае

$$\omega^\alpha=0, \quad \omega^\alpha_p=k^\alpha_p\omega^p; \quad p=1, \ldots, n; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots=n+1, \ldots, n+m \tag{4}$$

(по индексу p не суммировать!). Векторы

$$\mathbf{k}_p=\sum_\alpha k^\alpha_p\mathbf{e}_\alpha \tag{5}$$

называются главными векторами кривизны.

2. Докажем первое утверждение теоремы 2. Пусть, как и раньше,

$$m_1=\dim A_X(K_1, \ldots, K_n),$$

где $A_X(K_1, \ldots, K_n)$ — наименьшее аффинное подпространство в $T_X{}^\perp(V_n)$, которое содержит все точки $K_1, \ldots, K_n$, и пусть $m_1\leqslant n-3$. Путем перенумерации главных направлений (т. е. векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$) можно достичь, чтобы векторы $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{m_1+1}$ были радиусами-векторами точек $K_1, \ldots, K_{m_1+1}$ общего положения в $A_X(K_1, \ldots, K_n)$. В этом случае точки $K_1, \ldots, K_{m_1+1}$ образуют m_1-мерный симплекс, который в силу (1) является ортоцентрическим. Этот симплекс обозначим через Δ_X. Осталось выяснить, где могут помещаться остальные точки $K_{m_1+2}, \ldots, K_n$ с радиусами-векторами $\mathbf{k}_{m_1+2}, \ldots, \mathbf{k}_n$, которых не меньше двух.

Сначала покажем, что одна из них совпадает с некоторой вершиной симплекса Δ_X.

Возьмем точку K_{m_1+2}. Если она совпадает с одной из вершин $K_1, \ldots, K_{m_1+1}$, то цель достигнута. В противном случае для нее остается лишь одна возможность: она должна быть ортоцентром симплекса Δ_X, как следует из (1).

Так как $m_1+3\leqslant n$, то существует следующая точка K_{m_1+3}. Если она совпадает с одной из вершин, то цель достигнута. В противном случае возникает противоречие. Действительно, в силу (1) для любых различных K_{i_1} и K_{j_1}, являющихся вершинами симплекса Δ_X, должно быть $\overrightarrow{K_{i_1}K_{m_1+2}}\perp\overrightarrow{K_{j_1}K_{m_1+3}}$, где первый вектор является нормальным вектором грани симплекса Δ_X, не содержащей вершину K_{i_1}. Это говорит о том, что K_{m_1+3} лежит на этой грани симплекса Δ_X. Так как это относится к любой грани, то противоречие получено, потому что все грани симплекса Δ_X не могут иметь общую точку.

Перенумеруем вершины так, чтобы K_{m_1+3} совпадала с вершиной K_{m_1+1}. Из (1) следует, что

$$\langle\overrightarrow{K_{m_1+1}K_\rho}, \overrightarrow{K_{m_1+3}K_\pi}\rangle=\langle\overrightarrow{K_{m_1+1}K_\rho}, \overrightarrow{K_{m_1+1}K_\pi}\rangle=0, \qquad (\varrho, \pi=1, \ldots, m_1;\ \varrho\neq\pi),$$

т. е. ребра, которые выходят из вершины $K_{m_1+1}=K_{m_1+3}$, ортогональны й их векторы можно использовать в качестве базиса в m_1-мерном $A_X(K_1, \ldots, K_n)$. Следовательно,

$$\overrightarrow{K_{m_1+3}K_{m_1+2}}=\sum_\rho \xi^\rho_{m_1+2}\,\overrightarrow{K_{m_1+1}K_\rho}, \ \ldots, \ \overrightarrow{K_{m_1+3}K_n}=\sum_\rho \xi^\rho_n\,\overrightarrow{K_{m_1+1}K_\rho},$$

а из (1) следует, что написанные здесь векторы равны нулю, т. е. $K_{m_1+1}=K_{m_1+2}=\ldots=K_n=K$. Этим при $m_1\leqslant n-3$ доказано утверждение, касающееся индикатрисы нормальной кривизны. Остается показать, что V_n вполне квазиомбилическое.

Обозначим радиус-вектор особой вершины K через $\mathbf{k}$. Репер в нормальном пространстве $T_X{}^\perp(V_n)$ специализируем так, что $\mathbf{e}_{n+\rho}\|\overrightarrow{KK_\rho}$ $(\varrho=1, \ldots, m_1)$; векторы $\mathbf{e}_{n+m_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+m}$ идут тогда в ортогональное дополнение к $A_X(K_1, \ldots, K_n)$ в $T_X{}^\perp(V_n)$. Матрица второй фундаментальной формы в направлении $\mathbf{e}_{n+\rho}$ имеет при этом вид

$$B_\rho=\left\|\begin{array}{c|c|c} Ek^{n+\rho} & 0 & \\ \hline & k^{n+\rho}_\rho & 0 \\ \hline 0 & 0 & Ek^{n+\rho} \end{array}\right\| \quad \begin{array}{ccc}\underbrace{\qquad\qquad}_{\rho-1} & \underbrace{\qquad}_{1} & \underbrace{\qquad\qquad}_{n-\rho}\end{array}$$

где $k^{n+\rho}=\langle\mathbf{k}, \mathbf{e}_{n+\rho}\rangle$, $\underset{\rho}{k}{}^{n+\rho}=\langle\mathbf{k}_\rho, \mathbf{e}_{n+\rho}\rangle$, а E является единичной матрицей нужного порядка. В направлении вектора $\mathbf{e}_{n+\lambda}(\lambda=m_1+1, \ldots \ldots, m)$ имеем $B_\lambda=k^{n+\lambda}E$, где $k^{n+\lambda}=\langle\mathbf{k}, \mathbf{e}_{n+\lambda}\rangle$. Следовательно, V_n является вполне квазиомбилическим. Первое утверждение теоремы 2 доказано.

3. Докажем второе утверждение этой теоремы. Пусть $m_1=\dim A_X(K_1, \ldots, K_n)\geqslant n-2>1$. Точки $K_1, \ldots, K_{m_1+1}$ с радиус-векторами $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{m_1+1}$ образуют симплекс Δ_X в $A_X(K_1, \ldots, K_n)$. Из (1) следует, что симплекс Δ_X является ортоцентрическим, так как его неприлежащие ребра ортогональны.

Так как всегда $m_1\leqslant n-1$, то при $m_1\geqslant n-2$ возможны лишь два случая: либо $m_1=n-1$, либо $m_1=n-2$. В первом случае радиус-векторы вершин симплекса Δ_X исчерпывают все главные векторы кривизны. Во втором случае остается еще вектор $\mathbf{k}_{m_1+2}=\mathbf{k}_n$, который в силу (1) является радиус-вектором ортоцентра симплекса Δ_X. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. При $m_1=n-2$ может оказаться, что ортоцентр совпадает с одной из вершин симплекса Δ_X, которая является тогда особой вершиной прямоугольного симплекса. Также как в предыдущем пункте можно показать, что если это имеет место в любой точке V_n, то V_n является вполне квазиомбилическим.

Отметим также, что если ортоцентр находится внутри симплекса Δ_X, то индикатриса нормальной кривизны совпадает с Δ_X.

З а м е ч а н и е 2. Если подмногообразие V_n в ситуации теоремы 2 имеет попарно различные главные векторы кривизны в каждой своей точке, то либо $m_1=n-1$, либо $m_1=n-2$ и индикатриса нормальной кривизны не является прямоугольным симплексом.

§ 3. Доказательство теоремы 3

1. Подготовим сперва нужный аналитический аппарат. Пусть дано подмногообразие $V_n\in I_{(n,m)}$. Из (2) следует, что для его изотермического атласа $\omega^p=e^{-\sigma}du_p$ и поэтому $d(e^\sigma\omega^p)=0$, т. е.

$$d\sigma\wedge\omega^p+\sum_{q=1}^{n}\omega^q\wedge\omega_q^p=0.$$

Отсюда $d\sigma=\sum_q l_q\omega^q$, $\omega_q^p+l_q\omega^p=\sum_{r\neq p}\lambda_{qr}^p\omega^r$, где $\lambda_{qr}^p=\lambda_{rq}^p$ $(p\neq q, p\neq r)$.

Если учесть здесь $\omega_p^q+\omega_q^p=0$, получим $\lambda_{qq}^p=l_p$, $\lambda_{qr}^p+\lambda_{pr}^q=0$ при различных p, q, r. Последнее равенство дает, что $\lambda_{pr}^q=0$ при $p\neq q\neq r\neq p$. Следовательно,

$$\omega_q^p=l_p\omega^q-l_q\omega^p. \tag{6}$$

Из (4) получается дифференциальным продолжением, что

$$dk_p^\alpha=a_p^\alpha\omega^p+\sum_{q\neq p}l_q(k_p^\alpha-k_q^\alpha)\omega^q-\sum_\gamma k_p^\nu\omega_\gamma^\alpha, \tag{7}$$

а из (6), что

$$dl_p-\frac{1}{2}\Big(\sum_i l_i^2+\sum_\gamma k_p^\gamma k_q^\gamma\Big)\omega^p=\lambda_{pq}\omega^q+\mu_{pq}\omega^p, \tag{8}$$

где $\mu_{pq}=-\mu_{qp}$, $q\neq p$. Теперь из (5) следует, что

$$d\mathbf{k}_p=(\mathbf{a}_p-\langle\mathbf{k}_p,\mathbf{k}_p\rangle\mathbf{e}_p)\omega^p+\sum_{q\neq p}[l_q(\mathbf{k}_p-\mathbf{k}_q)-\langle\mathbf{k}_p,\mathbf{k}_q\rangle\mathbf{e}_q]\omega^q, \tag{9}$$

где $\mathbf{a}_p=\sum_\gamma a_p^\nu\mathbf{e}_\gamma$.

Предположим, что $n\geqslant 3$. Заменим в (8) индексное значение q значением r, $r\neq q$, $r\neq p$. Получаются равенства $\lambda_{pq}=\lambda_{pr}=0$ и $\mu_{pr}-\mu_{pq}=\frac{1}{2}\langle\mathbf{k}_p,\mathbf{k}_q-\mathbf{k}_r\rangle$. Если произвести циклирование по p, q, r и учесть $\mu_{pq}+\mu_{qp}=0$, то в результате имеем $\mu_{pq}=\frac{1}{2}\langle\mathbf{k}_r,\mathbf{k}_p-\mathbf{k}_q\rangle$. Подстановка в (8) дает

$$dl_p=\frac{1}{2}\Big(\sum_i l_i^2+\langle\mathbf{k}_p,\mathbf{k}_q+\mathbf{k}_r\rangle-\langle\mathbf{k}_q,\mathbf{k}_r\rangle\Big)\omega^p. \tag{10}$$

Если $n\geqslant 4$, то из (10) следует, что

$$\langle\mathbf{k}_p-\mathbf{k}_q,\mathbf{k}_r-\mathbf{k}_s\rangle=0 \tag{11}$$

при четырех различных значениях p, q, r, s. Заметим, что (11) согласуется с утверждением теоремы 1, так как изотермическое подмногообразие по своему определению конформно плоское.

Из (10) дифференциальным продолжением получается конечное соотношение

$$\langle\mathbf{a}_p,\mathbf{k}_q-\mathbf{k}_r\rangle=0, \tag{12}$$

а из (7) система ковариантов

$$\Delta a_p^\alpha\wedge\omega^p=0, \tag{13}$$

где $\Delta a_p^\alpha=da_p^\alpha+\sum_\gamma a_p^\nu\omega_\gamma^\alpha-2a_p^\alpha\sum_{i\neq p}l_i\omega^i$. Из (12) путем дифференцирования получаются $C_n{}^2$ линейных соотношений

$$\langle\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_q\rangle=0. \tag{14}$$

Предложение 1. *Самое общее подмногообразие V_n класса*

$I_{(n,m)}$ ($n>3$) *определяется в каноническом репере системой, которая состоит из уравнений* (4), (6), (7), (10) *при конечных соотношениях* (11), (12), (14). *Эта система находится в инволюции; следовательно, класс $I_{(n,m)}$ оказывается непустым.*

Доказательство. Первая часть предложения суммирует предыдущие рассуждения. Осталось убедиться в совместности этой системы в самом общем случае. Применяем метод продолжения системы до инволюции по критерию Картана (см. [16]).

Общий n-мерный интегральный элемент системы ковариантов (13) определяется уравнениями

$$da^{\alpha}_{p} = A^{\alpha}_{p}\omega^{p} + 2a^{\alpha}_{p}\sum_{i\neq p} l_i\omega^i - \sum_{\gamma} a^{\gamma}_{p}\omega^{\alpha}_{\gamma},$$

где $A_p{}^{\alpha}$ являются произвольными параметрами.

Из (12) и (14) получаем $C^2_n + nC^2_{n-1}$ содержит линейных соотношений

$$\sum_{\gamma} (\Delta a^{\gamma}_{p} a^{\gamma}_{q} + a^{\gamma}_{p}\Delta a^{\gamma}_{q}) = 0, \quad \sum_{\gamma} \Delta a^{\gamma}_{p}(k^{\gamma}_{q} - k^{\gamma}_{r}) = 0$$

на вторичные формы $\Delta a_p{}^{\gamma}$. Следовательно, система ковариантов (13) содержит $nm - nC^2_{n-1} - C^2_n$ независимых форм $\Delta a_p{}^{\gamma}$ и матрица ее полярной системы имеет ранг

$$s_1 = nm - nC^2_{n-1} - C^2_n;$$

поэтому $s_2 = \ldots = s_n = 0$.

Параметры $A_p{}^{\alpha}$, как следует из (12) и (14), связаны с $nC^2_{n-1} + C^2_n$ линейными соотношениями вида

$$\langle \mathbf{A}_p, \mathbf{k}_q - \mathbf{k}_r \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{A}_p, \mathbf{a}_q \rangle = 0,$$

где $\mathbf{A}_p = \sum_{\gamma} A^{\gamma}_{p}\mathbf{e}_{\gamma}$. Так как число произвольных параметров в интегральном элементе равно числу Картана, то рассматриваемая система находится в инволюции.

2. Доказательство теоремы 3. Пусть V_n является подмногообразием класса $I^{(n)}_{(n,n-2)}$. Из замечания 2 и очевидного неравенства $m_1 \leqslant m = n-2$ следует, что $m_1 = m = n-2$, т. е. $A_X(K_1, \ldots, K_n) = T_X{}^{\perp}(V_n)$ и в этом $(n-2)$-мерном пространстве помещаются n точек $K_1, \ldots, K_n$, являющихся вершинами ортоцентрического симплекса и его ортоцентром. При любой фиксации p и q, $p\neq q$, найдутся $\mathbf{k}_q - \mathbf{k}_{r_1}, \ldots, \mathbf{k}_q - \mathbf{k}_{r_m}$, составляющие базис в $T_X{}^{\perp}(V_n)$. Так как $\mathbf{a}_p \in T_X{}^{\perp}(V_n)$, то из (12) следует, что $\mathbf{a}_p = 0$ ($p = 1, \ldots, n$). Это означает, как следует из (9), что все главные векторы кривизны являются параллельными в нормальной связности вдоль соответствующих им линий кривизны. Теорема доказана.

Вообще, вопрос о существовании подмногообразия $V_n \in I^{(n)}_{(n,m)}$, главные кривизны которого параллельны в нормальной связности вдоль соответствующих им линий кривизны, решается следующим предложением, которое следует непосредственно из доказательства предложения 1.

Предложение 2. *Подмногообразие V_n класса $I^{(n)}_{(n,m)}$ ($n-2 \leqslant m_1 \leqslant m$) при $n=3$ ($n>3$), главные векторы кривизны которого параллельны в нормальной связности вдоль соответствующих им линий кривизны, определяется в каноническом репере вполне интегрируемой системой, которая состоит из уравнений* (4), (6), (7) *и* (10), *где все* $\mathbf{a}_p = 0$ (*при конечных соотношениях* (11)).

§ 3. Доказательство теоремы 4

1. Начнем с утверждения 1) теоремы 4. Пусть $V_n (n \geqslant 3)$ является изотермическим подмногообразием в E_{n+m} с n попарно различными главными векторами кривизны, параллельными в нормальной связности вдоль соответствующих им линий кривизны.

Из (9) следует, что такое подмногообразие V_n выделяется условиями $\mathbf{a}_p = 0$; $p = 1, \ldots, n$. Поэтому V_n помещается в своей первой соприкасающейся плоскости, определяемой как аффинная оболочка точки $X \in V_n$ пространства $T_X(V_n)$ и всех главных векторов кривизны $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$.

Система, указанная в предложении 2, теперь вполне интегрируема, и рассматриваемая V_n существует с произволом постоянных. Ее линии кривизны, являющиеся интегральными линиями систем $\omega^1 = \ldots = \omega^{p-1} = \omega^{p+1} = \ldots = \omega^n = 0$, суть окружности, так как

$$d\mathbf{e}_p = \Big(\sum_{i \neq p} l_i \mathbf{e}_i + \mathbf{k}_p \Big) \omega^p,$$

$$d\Big(\sum_{i \neq p} l_i \mathbf{e}_i + \mathbf{k}_p \Big) = -\Big(\sum_{i \neq p} l_i^2 + \langle \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p \rangle \Big) \omega^p \mathbf{e}_p.$$

Плоскости этих окружностей при заданном p проходят через фиксированную прямую или параллельны между собой.

Действительно, если $l_p \neq 0$, то прямая, которая проходит через точку C_p с радиус-вектором $\mathbf{c}_p = \mathbf{x} + l_p^{-1} \mathbf{e}_p$ в направлении вектора

$$\mathbf{m}_p = 2 l_p \Big(\sum_{i \neq p} l_i \mathbf{e}_i + \mathbf{k}_p \Big) + \Big(l_p^2 - \sum_{i \neq p} l_i^2 - \langle \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q + \mathbf{k}_r \rangle + \langle \mathbf{k}_q, \mathbf{k}_r \rangle \Big) \mathbf{e}_p, \qquad (15)$$

где p, q, r — три различных значения индекса $i = 1, \ldots, n$, принадлежит плоскости рассматриваемой окружности кривизны и является неподвижным, так как

$$d(\mathbf{x} + l_p^{-1} \mathbf{e}_p) = -\frac{1}{2} l_p^{-2} \mathbf{m}_p \omega^p,$$

$$d\mathbf{m}_p = \mathbf{m}_p \sum_i l_i \omega^i$$

(заметим, что при $n > 3$ в силу (11) выражение вектора (15) не зависит от того, какие значения принимают q и r.) Непосредственно проверяется, что $\mathbf{m}_p \perp \mathbf{m}_q$, т. е. направления этих прямых попарно ортогональны.

Если $l_p = 0$, то плоскости рассматриваемых окружностей сохраняют свое 2-направление, потому что тогда при любом смещении точки X на рассматриваемом подмногообразии V_n имеем

$$d\mathbf{e}_p = \Big(\sum_{i \neq p} l_i \mathbf{e}_i + \mathbf{k}_p \Big) \omega^p,$$

$$d\Big(\sum_{i \neq p} l_i \mathbf{e}_i + \mathbf{k}_p \Big) = -\Big(\sum_{i \neq p} l_i^2 + \langle \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p \rangle \Big) \omega^p \mathbf{e}_p + \sum_{i \neq p} l_i \omega^i \Big(\sum_{j \neq p} l_j \mathbf{e}_j + \mathbf{k}_p \Big),$$

так как из (10) следует теперь, что $\sum_i l_i^2 + \langle \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q + \mathbf{k}_r \rangle - \langle \mathbf{k}_q, \mathbf{k}_r \rangle = 0$. Утверждение 1) доказано.

2. Докажем утверждение 2) теоремы 4. Пусть один вектор главной

кривизны равен нулю, например, $\mathbf{k}_n=0$. Из (9), где $\mathbf{a}_i=0$, следует, что $l_p=0$ ($p=1, \ldots, n-1$) и

$$d\mathbf{k}_p=-\langle\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p\rangle\mathbf{e}_p\omega^p+l_n\mathbf{k}_p\omega^n-\sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n-1}\langle\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\rangle\mathbf{e}_i\omega^i,$$

а из (10) получается $\langle\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q\rangle=-l^2_n$, $1\leqslant p, q\leqslant n-1$, $p\neq q$ и

$$dl_n=l^2_n\,\omega^n.$$

Теперь 2-направление, натянутое на векторы $\mathbf{e}_p$ и $l_n\mathbf{e}_n+\mathbf{k}_p$, инвариантно связано с подмногообразием при каждом значении $p=1, \ldots, n-1$, так как

$$d\mathbf{e}_p=(l_n\mathbf{e}_n+\mathbf{k}_p)\,\omega^p,$$

$$d(l_n\mathbf{e}_n+\mathbf{k}_p)=l_n(l_n\mathbf{e}_n+\mathbf{k}_p)\,\omega^n-(l^2_n+\langle\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p\rangle)\,\omega^p\mathbf{e}_p.$$

Пусть $l_n\neq 0$. Плоскость, которая проходит через точку Y с радиус-вектором $\mathbf{y}=\mathbf{x}+l_n^{-1}\mathbf{e}_n$ с этим инвариантным 2-направлением, неподвижна, так как $d\mathbf{y}=0$ при любом смещении вдоль подмногообразия V_n. Линии кривизны в направлении вектора $\mathbf{e}_n$ являются прямыми, которые проходят через неподвижную точку Y и образуют постоянный угол α_p каждой из вышеуказанных неподвижных 2-плоскостей. Действительно, проекция этой прямой на рассмотренной неподвижной 2-плоскости имеет направляющий вектор $l_n\mathbf{e}_n+\mathbf{k}_p$ и $d(\cos^2\alpha_p)=0$.

В терминах эллиптической геометрии подмногообразие кривизны, вдоль которой $\omega^n=0$ является $(n-1)$-мерной обобщенной поверхностью Клиффорда [17] и V_n является конусом над ней.

Пусть $l_n=0$. Ненулевые главные векторы кривизны являются попарно ортогональными и $m\geqslant n-1$. Очевидно, такое подмногообразие является изопараметрическим. Оно устроено как цилиндр над произведением $(n-1)$-окружностей. Действительно, прямые на V_n с направляющим вектором $\mathbf{e}_n$ являются параллельными, а их ортогональное сечение, выделяемое уравнением $\omega^n=0$ является произведением окружностей на плоскостях пар векторов $(\mathbf{e}_p, \mathbf{k}_p)$. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cartan, E.* Bull. Soc. math. France, **45**, 57—121 (1917).
2. *Schouten, J. A.* Math. Z., **11**, 58—88 (1921).
3. *Chen, B.-Y.* Geometry of Submanifolds. New York, M. Dekker, 1973.
4. *Вербицкий Л. Л.* Тр. семин. по вект. и тензорн. анал., вып. 9, 146—182 (1952).
5. *Gebarowski, A.* Demonstr. Math., **6**, № 2, 641—646 (1973).
6. *Amur, K., Pujar, S.* Tensor (N. S.), **32**, 62—64 (1978).
7. *Chen, B.-Y., Teng, T. H., Soochow, J.* Math. Natur. Sci., **1**, № 1, 9—16 (1975).
8. *Chen, B.-Y., Verstraelen, L.* Boll. Unione mat. ital., **A14**, № 1, 49—57 (1977).
9. *Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы в дифференциальной геометрии. М., Гос. изд. ин. лит., 1948.
10. *Крейцер Г. П., Тюрин Г. И.* Матем. просвещение, вып. 2, 188—194 (1957).
11. *Лумисте Ю.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, 734, 36—49 (1986).
12. *Вяльяс М.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, 734, 20—30 (1986).
13. *Harle, C. E.* Boll. Soc. Bras. Mat., **13**, № 2, 35—48 (1982).
14. *Strübing, W.* Geom. dedic., **20**, № 3, 367—387 (1986).
15. *Chen, B.-Y.* Boll. Unione mat. ital., **10**, 380—385 (1974).
16. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
17. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М., «Наука», 1969.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 9/I 1987

M. VÄLJAS

ISOTERMILISTEST ALAMMUUTKONDADEST KONFORMSELT TASASES RUUMIS

Töös on antud alammuutkonna normaalkõveruse indikatrissi mõistet kasutades geomeetriline tõlgendus seosele (*), on defineeritud isotermilised alammuutkonnad ja tõestatud nende olemasolu. Isotermiliste alammuutkondade hulgas on leitud näited konformselt tasastest alammuutkondadest, mis pole täielikult kvaasiombilised.

M. VÄLJAS

ON ISOTHERMAL SUBMANIFOLDS IN A CONFORMALLY FLAT SPACE

It is known that a hypersurface V_n $(n>3)$ in a conformally flat space V_{n+1} is conformally flat if and only if it is quasiumbilical [1, 2]. In [8] this result was generalized and the next condition on principal curvature vectors $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$ of V_n with flat normal connection $\nabla^{\perp}$ was found

$$\langle \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_q, \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_s \rangle = 0 \qquad (*)$$

with mutually different p, q, r, s. This is necessary and sufficient for V_n to be conformally flat. As a consequence, a V_n with flat $\nabla^{\perp}$ is totally quasiumbilical always if $m<n-2$.

The normal curvature vector in the direction of unit tangent vector $\mathbf{f}=\sum_{i=1}^{n} \varphi^i \mathbf{e}_i$, where $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ are unit tangent vectors of curvature lines, is $\mathbf{k}=\sum_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i (\varphi^i)^2$. At each point $X \in V_n$ the next set of points $\{K : \overrightarrow{XK}=\mathbf{k}\}$ is the normal curvature (indicatrix (see [9]); let m_1 be the dimension of its affine hull. If $\dim T_X^{\perp}(V_n) \geqslant n-1$ and the points $K_1, \ldots, K_n$ are in a general position, where $\overrightarrow{XK_i}=\mathbf{k}_i$, the normal curvature indicatrix is a simplex.

In the first part of this paper, a geometrical interpretation of the condition (*) is given, and a generalization of the consequence is proved by a new method.

T h e o r e m 2. *Let V_n $(n>3)$ be a submanifold with flat normal connection in a conformally flat space V_{n+m}. If $m_1<n-2$, then V_n is totally quasiumbilical. If $m_1 \geqslant$ $\leqslant n-2$ at a point $X \in V_n$, then normal curvature indicatrix at X is convex hull of an orthocentral simplex and its orthocentre (or the orthocentral simplex itself, if the latter contains its orthocentre).*

In the second part of this paper, new examples of conformally flat submanifolds V_n with flat normal connection are given. They are found among isothermal submanifolds and, in general, are not totally quasiumbilical.

D e f i n i t i o n. A conformally flat submanifold V_n with flat normal connection in a conformally flat space V_{n+m} is called isothermal, if it has an isothermal atlas whose net of coordinate lines in each card is a net of curvature lines.

Submanifold V_n with flat normal connection in E_{n+m} is called a Dupin-Mannheim submanifold, if its families of curvature lines consist of circles whose planes have a common straight line or are parallel to each other.

T h e o r e m 3. *Let V_n $(n \geqslant 3)$ be an isothermal submanifold in a conformally flat space $V_{2(n-1)}$ with n mutually different principal curvature vectors. Then these vectors are parallel in normal connection along their corresponding curvature lines.*

T h e o r e m 4. *An isothermal submanifold V_n $(n \geqslant 3)$ in a conformally flat V_{n+m} $(n-2 \leqslant m_1 \leqslant m)$ with n mutually different principal curvature vectors, parallel in normal connections along their corresponding curvature lines, is a union of closures of domains, whose images under local conformal mappings from V_{n+m} in to E_{n+m} are*

1) in case of non-zero principal curvature vectors: submanifolds of Dupin-Mannheim,

2) in case of one zero principal curvature vector: a) Clifford cones (projecting $(n-1)$-dimensional Clifford submanifolds from centres of hyperspheres containing them) or b) isoparametric cylinders on products of $(n-1)$ circles (i. e. limit cases of previous cones if the vertices tend to infinity).