EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 3

УДК 519.644

А. МАРШАК

ЗАМЕЧАНИЕ О КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ КЛЕНШОУ—КУРТИСА

A. *MARŠAK*. MÄRKUS CLENSHAW—CURTISE KVADRATUURVALEMI KOHTA

A. *MARSHAK*. A REMARK ON CLENSHAW—CURTIS QUADRATURE RULE

(Представил Г. Кузмин)

В данной заметке рассматриваются квадратурные формулы (КФ) Кленшоу—Куртиса, отображенные на [0, 1], а именно [1, 2] *:

$$\int_0^1 f(\mu)\,d\mu \approx \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f(\mu_j), \quad N \text{ — чётное,} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \mu_j = \sin^2(\pi j/2N), \quad j=1, 2, \ldots, N, \\ \alpha_j = (2/N) \sum\limits_{i=0}^{N/2}{}'' (1-4i^2)^{-1} \cos(2ij\pi/N), \quad j=1, 2, \ldots, N-1, \\ \alpha_N = 0{,}5/(N^2-1). \end{cases} \tag{2}$$

Покажем, что узлы и веса КФ {(1), (2)} удовлетворяют условию **

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mu_j^{i-1} = (\mu_{l+1}^i + \mu_l^i)/2i + O(\mu_1)\mu_l^{i-1}, \quad l=1, 2, \ldots, N,$$

$$i=1, 2, \ldots; \ \mu_{N+1}=1. \tag{3}$$

Заметим, что это условие означает, что сумма $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mu_j^{i-1}$ должна находиться «недалеко» от середины интервала $\left(\int_0^{\mu_l} \mu^{i-1}\,d\mu, \int_0^{\mu_{l+1}} \mu^{i-1}\,d\mu\right)$.

Для класса КФ, удовлетворяющих (3), можно получить нестандартную форму остаточного члена, которая учитывает сильную неравномерность расположения узлов КФ (например, сгущение к левому концу отрезка интегрирования).

1. КФ Кленшоу—Куртиса и ее предельный случай. Параллельно с КФ {(1), (2)} рассмотрим ее предельный случай [2]

$$\begin{cases} \bar{\mu}_j = \mu_j, \quad j=1, 2, \ldots, N, \\ \bar{\alpha}_j = (\pi/2N)\sin(\pi j/N), \quad j=1, 2, \ldots, N-1, \quad \bar{\alpha}_N = \alpha_N. \end{cases} \tag{4}$$

---

* Знак Σ'' означает, что первый и последний член суммы взяты с коэффициентом 0,5.
** Запись $A_n = O(B_n)$, где $B_n > 0$, $n=1,2, \ldots$ означает, что последовательность A_n/B_n при $n \to \infty$ ограничена.

Посмотрим, насколько КФ $\{(1), (4)\}$ отличается от КФ $\{(1), (2)\}$, т. е. оценим разность $\bar{\alpha}_j - \alpha_j$, $j=1, 2, \ldots, N-1$.

Лемма 1. *Для любого* $t \in (0, \pi)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = (\sin t)^{-1}\left\{-\frac{\sin^2 Mt}{2M+1} + \frac{1}{2(2M+1)} + \right.$$
$$+ \frac{\sin(2M+1)t}{2\sin t(2M+1)(2M+3)} - \frac{\cos(2M+2)t}{\sin^2 t(2M+1)(2M+3)(2M+5)} +$$
$$+ O(M^{-4}\sin^{-3} t),$$

где $M=1, 2, \ldots$.

Доказательство леммы основывается на технике, предложенной в [3], с. 535.

Используя результат леммы 1 для остатка ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = \pi/4, \quad t \in (0, \pi),$$

и преобразуя веса (2) согласно [2], можно показать, что имеет место

Лемма 2. *Для определенных в* (2) *и* (4) *весов КФ* (1) *справедливо равенство*

$$\bar{\alpha}_j - \alpha_j = (1-)^s \sin^{-2}(\pi j/N)\,[(N-1)(N+1)(N+3)N]^{-1} +$$
$$O(\sin^{-3}(\pi j/N) N^{-5}).$$

2. Равносильность условий. Непосредственная проверка условия (3) довольно трудоемка. Оказывается, что справедлива

Лемма 3. *Для того, чтобы узлы и веса КФ* (1) *удовлетворяли условию* (3), *необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли равенствам*

$$\begin{cases} \alpha_1 \mu_1^{i-1} - (\mu_2^i + \mu_1^i)/2i = \mu_1 c_1^{N,i}, & j=1, \\ \alpha_j \mu_j^{i-1} - (\mu_{j+1}^i - \mu_{j-1}^i)/2i = \mu_1 c_j^{N,i}, & j=2, 3, \ldots, l, \end{cases} \tag{5}$$

где величины $c_j^{N,i}$ *таковы, что*

$$\sum_{j=1}^{l} c_j^{N,i} = O(\mu_l^{i-1}); \quad l=1, 2, \ldots, N, \quad i=1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Достаточность доказывается путем непосредственного сложения правых и левых частей равенств (5). Для доказательства необходимости можно провести индукцию.

3. Проверка условий (5)—(6). Сформулируем две леммы.

Лемма 4. *Пусть* a *и* b *некоторые действительные числа. Тогда при всех* $k=2, 3\ldots$ *справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{k} (a+b)^{2k-2i}(a-b)^{2i-2} = k(a^{2k-2}+b^{2k-2}) + \sum_{m=1}^{k-2} d_{k,m} a^{2k-2m-2} b^{2m},$$

где

$$d_{k,m} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m} (-1)^l c_{2k-2i}^{2m-l}\, c_{2i-2}^{l}, \quad m=0, 1, \ldots, k-1.$$

(*Здесь* c_k^i — *биномиальные коэффициенты.*)

Лемма 5. *Пусть $a=\pi/2N$. Тогда справедливо асимптотическое равенство*

$$a\sum_{j=1}^{l}\sin^k aj\cos^m aj=O(\sin^{k+1}al),$$

$$k=1, 2, \ldots,\quad m=1, 2, \ldots,\quad l=1, 2, \ldots, N,$$

С помощью лемм 4 и 5 можно показать, что КФ {(1), (4)} удовлетворяет условиям (5) — (6), а отсюда, ввиду равносильности условий (3) и (5) — (6) (лемма 3), следует

Теорема 1. *Узлы и веса КФ {(1), (4)} удовлетворяют условию* (3).

Используя лемму 2, этот результат можно перенести и на КФ {(1), (2)}, а именно

Теорема 2. *Узлы и веса КФ Кленшоу—Куртиса удовлетворяют условию* (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *El-Gendi, S. E.* Comput. J., № 12, 282—287 (1969).
2. *Imhof, I. P.* Numer. Math., № 5, 138—141 (1963).
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функции действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/XI 1985

Переработанный вариант
21/II 1986