EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 3
https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.3.14

УДК 517.988.54

*М. ФЛЕЙДЕРВИШ*

# КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*M. FLEIDERVIS.* SILEDATE TEISENDUSTE PUUTUJARUUMID

*M. FLEIDERVISH.* TANGENTIAL SPACES FOR SMOOTH TRANSFORMATIONS

*(Представил А. Хумал)*

Пусть $M$ — некоторое подмножество банахова пространства $X$. Вектор $h\in X$ называется касательным к множеству $M$ в точке $x^0\in M$, если существует $\varepsilon>0$ и отображение $t\to r(t)$ отрезка $[0,\varepsilon]$ в $X$ такие, что $x^0+th+r(t)\in M$ при всех $t\in[0,\varepsilon]$ и $\|r(t)\|/t\to 0$ при $t\to 0$.

Если $F: X\to Y$ отображение банаховых пространств $X$ и $Y$, а $U$ — окрестность точки $x^0\in X$, то в качестве $M$ берется множество $M=\{x\in U\,|\,F(x)=F(x_0)\}$, а множество всех касательных векторов к множеству $M$ в точке $x^0\in X$ обозначается $TM(x^0)$.

Множество $TM(x^0)$ является замкнутым конусом и $TM(x^0)\subset\subset\operatorname{Ker}F'(x^0)$. Исследование необходимых условий экстремальных задач с ограничениями приводит к вопросу о том, в каких случаях $TM(x^0)==\operatorname{Ker}F'(x^0)$ [1]. В случае регулярности отображения $F$ в точке $x^0$ этот вопрос был решен положительно Л. А. Люстерником. В данной работе вопрос о равенстве касательного конуса и ядра производной отображения $F$ получил распространение и на нерегулярный случай.

В вышеуказанных обозначениях справедлива

Теорема. *Пусть $F: X\to Y$ — строго дифференцируемое в точке $x^0\in X$ отображение банаховых пространств $X$ и $Y$. Если для всякого $r(t)\subset X$ такого, что $\|r(t)\|/t\to 0$ при $t\to 0$ найдется $\varepsilon>0$, так что при всех $t\in[0,\varepsilon]$ и $h\in\operatorname{Ker}F'(x^0)$*

$$F(x^0+th+r(t))-F(x^0)\in\operatorname{Im}F'(x^0),$$

*то*

$$TM(x^0)=\operatorname{Ker}F'(x^0).$$

Доказательство. Включение $TM(x^0)\subset\operatorname{Ker}F'(x^0)$ тривиально (см., например, [2] с. 41). Покажем обратное включение, доказывая теорему от противного: пусть существует $h\in\operatorname{Ker}F'(x^0)$ такой, что $h\,\overline{\in}\,TM(x^0)$. Тогда $\forall r(t)\subset X$ такого, что при $t\to 0$, $\|r(t)\|/t\to 0$ справедливо

$$F(x^0+t_0h+r(t_0))-F(x^0)\neq 0, \tag{1}$$

где $t_0\in[0,\varepsilon]$, $\forall\varepsilon>0$. По теореме Хана—Банаха существует $y^*\in Y^*$ такой, что

$$\langle y^*, F(x^0+t_0h+r(t_0))-F(x^0)\rangle\neq 0. \tag{2}$$

Возьмем $\varepsilon$ настолько малым, чтобы $\forall t\in[0,\varepsilon]$ выполнялось условие теоремы. Тогда $F(x^0+t_0h+r(t_0))-F(x^0)\in\operatorname{Im}F'(x^0)$, т. е. $\exists\,\bar{x}\in X$ такой, что

$$F(x^0+t_0h+r(t_0))-F(x^0)=F'(x^0)\bar{x}.$$

Подставляя это в (2) получим

$$\langle y^*, F'(x^0)\bar{x}\rangle=\langle F'^*(x^0)y^*, \bar{x}\rangle\neq 0$$

откуда следует, что $y^*\overline{\in}\ \mathrm{Ker}\, F'(x^0)$. Тогда функционал $x^*\in X^*$, определяемый равенством

$$x^*=F'^*(x^0)y^*, \tag{3}$$

не равен нулю, т. е. $x^*(X)=R$. По теореме Банаха об открытом линейном отображении, величина (см. [2] с. 45)

$$C(x^*)=\sup_{\lambda\in R}\left(\frac{1}{|\lambda|}\inf\{\|x\|\,|\,x\in X,\ \langle x^*, x\rangle=\lambda\}\right)<\infty. \tag{4}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Phi_t(x)=x-x^{*-1}y^*[F(x^0+\mathrm{th}+x)-F(x^0)], \tag{5}$$

где $h\in\mathrm{Ker}\, F'(x^0)$ — зафиксированный, не принадлежащий $TM(x^0)$ вектор, а $x^*\neq 0$ и $y^*\neq 0$.

Обозначим через $h(A, B)$ хаусдосфово расстояние между множествами $A$ и $B$. Функционал

$$\varphi(x)=\langle y^*, F(x^0+\mathrm{th}+x)-F(x^0)\rangle$$

отображает $X$ в $R$. Поэтому множества $\Phi_t(x_1)$ и $\Phi_t(x_2)$ являются сдвигами одного и того же подпространства в $X$. Поэтому (см. [2] с. 44)

$$h(\Phi_t(x_1), \Phi_t(x_2))=\inf\{\|z_1-z_2\|\,|\,z_i\in\Phi_t(x_i)\}. \tag{6}$$

Отсюда, из (5) и строгой дифференцируемости отображения в точке $x^0$ имеем

$$\begin{aligned}
&h(\Phi_t(x_1), \Phi_t(x_2))=\\
&=\inf\{\|z_1-z_2\|\,|\,\langle x^*, z_i\rangle=\langle x^*, x_i\rangle-\langle y^*, F(x^0+\mathrm{th}+x_i)-F(x^0)\rangle\}=\\
&=\inf\{\|z\|\,|\,\langle x^*, z\rangle=\langle x^*, x_1-x_2\rangle-\langle y^*, F(x^0+\mathrm{th}+x_1)-F(x^0+\mathrm{th}+x_2)\rangle\}=\\
&=\inf\{\|z\|\,|\,\langle x^*, z\rangle=\langle x^*, x_1-x_2\rangle-\langle y^*, F'(x^0)(x_1-x_2)\rangle+\\
&\quad+\langle y^*, 0(\|x_1-x_2\|)\rangle\}=\\
&=\inf\{\|z\|\langle x^*, z\rangle=\langle x^*-F^{*\prime}(x^0)y^*, x_1-x_2\rangle+\langle y^*, 0(\|x_1-x_2\|)\rangle\}.
\end{aligned}$$

Возьмем теперь $x^*$ таким, чтобы выполнялось соотношение (3). Тогда в силу (4) имеем

$$\begin{aligned}
h(\Phi_t(x_1), \Phi_t(x_2))&=\inf\{\|z\|\,|\,\langle x^*, z\rangle=\langle y^*, 0(\|x_1-x_2\|)\rangle\}\leqslant\\
&\leqslant C(x^*)\,|\langle y^*, 0(\|x_1-x_2\|)\rangle|.
\end{aligned}$$

В силу непрерывности $y^*$ и конечности константы $C(x^*)$ найдется такая окрестность нуля $U_1=\{x\,|\,\|x\|<\delta\}$, что для всех $x_i\in U_1$ имеет место

$$h(\Phi_t(x_1), \Phi_t(x_2))<\theta\|x_1-x_2\|,\quad \theta\in[0, 1]. \tag{7}$$

Так как $h\in\mathrm{Ker}\, F'(x^0)$, то $F(x^0+\mathrm{th})-F(x^0)=0(t)$ и в силу непрерывности $y^*$ для любого $\varepsilon>0$ в силу (4) и (5) имеем

$$\begin{aligned}
\varrho(0, \Phi_t(0))&=\inf\{\|z\|\,|\,\langle x^*, z\rangle=\langle y^*, F(x^0+\mathrm{th})-F(x^0)\rangle\}\leqslant\\
&\leqslant C(x^*)\,|\langle y^*, 0(t)\rangle|<\varepsilon t,
\end{aligned}$$

в том числе, это справедливо (при $0<\theta<1$) для $\varepsilon=\delta(1-\theta)$. Тогда

$$\varrho(0, \Phi_t(0))<\delta(1-\theta)t. \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) показывают, что в шаре $U_1$ для достаточно малых $t>0$ отображение $\Phi_t(x)$ является сжимающим. Поэтому существует $r(t)\subset X$ такое, что

$$\|r(t)\|\leqslant\frac{2}{1-\theta}\varrho(0, \Phi_t(0))=0(t)$$

и при всех достаточно малых $t>0$

$$r(t)\in\Phi_t(r(t)).$$

Отсюда и из (5) следует, что

$$0\in x^{*-1}y^*[F(x^0+\mathrm{th}+r(t))-F(x^0),$$

а следовательно,

$$\langle y^*, F(x^0+\mathrm{th}+r(t))-F(x^0)\rangle=0$$

для всех достаточно малых $t$, что противоречит (2) или тому, что $h\overline{\in} TM(x^0)$. Следовательно, $\forall h\in \operatorname{Ker} F'(x^0)$ выполняется $h\in TM(x^0)$, что и доказывает обратное включение.

Следствие. *Пусть отображение $F: X\to Y$ банаховых пространств, строго дифференцируемое в точке $x^0\in X$, регулярно в этой точке. Тогда*

$$TM(x^0)=\operatorname{Ker} F'(x^0).$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Im} F'(x^0)=Y$, то при всех $x$ из области определения отображения $F$ выполняется $F(x)-F(x^0)\in\operatorname{Im} F'(x^0)$. Остается применить теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флейдервиш М. С.* В кн.: Оптимизация и управление. М., Изд. МГУ, 1985, 73—75.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.

*Таллинский политехнический институт*

Поступила в редакцию
28/X 1985