LÜHITEATEID * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
SHORT COMMUNICATIONS

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 3

УДК 681.5.015

Юлле КОТТА

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Ülle KOTTA. PIDEVATE BILINEAARSETE SÜSTEEMIDE DISKRETISEERIMISEST

Ülle KOTTA. DISCRETIZATION OF CONTINUOUS BILINEAR SYSTEMS

(Представил Н. Алумяэ)

1. Введение. Мотивы построения дискретных аналогов непрерывных систем общеизвестны — синтез дискретных законов управления и их реализация с помощью микропроцессорных систем, проведение измерений только в дискретные моменты времени из соображений экономики и т. д. В данной работе будем искать дискретную модель непрерывной билинейной системы с одним входом и выходом. Причина выделения класса билинейных систем из общего класса нелинейных следующая. Билинейные системы составляют важный класс среди нелинейных в силу аппроксимирующей теоремы (доказана независимо М. Флиессом и Х. Суссманом), которая утверждает, что для обширного класса нелинейных систем можно на ограниченном интервале времени вывести сколь угодно близкие билинейные аппроксимации [1]*. Этот факт, наверное, и объясняет то, что многие важные для приложений управляемые процессы хорошо описываются билинейными системами дифференциальных уравнений. Более того, аппроксимирующая теорема остается в силе для ограниченных классов билинейных систем, например, если все матрицы в билинейной модели нильпотентные и одновременно треугольные [1].

2. Дискретная модель непрерывной билинейной системы. Непрерывная билинейная система описывается уравнениями

$$\dot{x}=(A+Bu)x, \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0,$$

где $x\in R^n$, $u\in R$, A и B — постоянные матрицы размера $n\times n$.

Разностные уравнения, решения которых совпадают в заданные дискретные моменты времени с решениями соответствующих дифференци-

* Имеется также работа, где предложены алгоритмы для нахождения билинейных аппроксимаций [2].

альных уравнений в предположении, что вход дифференциальных уравнений ступенчатая функция, называем дискретной моделью непрерывной системы.

Решение системы дифференциальных уравнений (1) имеет вид ([3], с. 110)

$$x(t) = X(t, t_0)\,x_0,$$

где

$$X(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} (A + Bu(\sigma_1))\,d\sigma_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (A + Bu(\sigma_1)) \int_{t_0}^{\sigma_1} (A + Bu(\sigma_2))\,d\sigma_2\,d\sigma_1 + \ldots . \tag{2}$$

Полагая, что $u(t) = u(kT)$ для $kT \leqslant t < kT + T$ (T — шаг дискретизации), запишем для этого интервала

$$X(t, kT) = I + (A + Bu(kT)) \int_{kT}^{t} d\sigma_1 + (A + Bu(kT))^2 \int_{kT}^{t} \int_{kT}^{\sigma_1} d\sigma_2\,d\sigma_1 + \ldots . \tag{3}$$

Нас интересуют координаты состояния только в дискретные моменты времени, кратные T.
Если $t = kT + T$, то (3) дает

$$X(kT + T, kT) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i (A + Bu(kT))^i}{i!} = e^{(A + Bu(kT))T},$$

а решение системы можно представить следующим образом

$$x(kT + T) = Fx(kT) + \sum_{p \geqslant 1} G_p x(kT)\,u^p(kT), \tag{4}$$

где

$$F = e^{AT},$$

$$G_p = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{T^{r+p}}{(r+p)!} \sum_{s_1=0}^{r} \sum_{s_2=0}^{r} \ldots \sum_{s_p=0}^{s_{p-1}} A^{\;p} B A^{s_{p-1} - s_p} B \ldots B A^{r - s_1}.$$

Очевидно, что порядок системы разностных уравнений (4) равен порядку исходной системы. Но дискретная модель непрерывной билинейной системы уже не билинейная, а полиномиальная.**. Последнее не удивительно, так как дискретный аналог аппроксимирующей теоремы Флиесса [1] утверждает, что для получения аппроксимаций дискретных нелинейных систем с произвольной точностью вместо билинейных мы должны рассматривать именно полиномиальные системы.

3. **Частный случай.** Предположим теперь, что матрицы A и B в уравнениях (1) нильпотентные и одновременно треугольные. Так как все собственные значения нильпотентной матрицы равны нулю ([4], с. 41), то следует, что и все диагональные элементы равны нулю. В таком случае в силу структуры матрицы $A + Bu(kT)$ ее степени выше $n-1$ равны нулевой матрице и

$$e^{(A + Bu(kT))T} = \sum_{j=1}^{n} \frac{T^{j-1}}{(j-1)!} (A + Bu(kT))^{j-1}.$$

Следовательно,

** Заметим, что билинейная система есть частный случай полиномиальных систем ($G_p = 0$, $p \geqslant 2$).

$$x(kT+T)=\bar{F}x(kT)+\sum_{p=1}^{n-1}\bar{G}_p x(kT)u^p(kT),$$

где

$$\bar{F}=\sum_{k=1}^{n}\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1},$$

$$\bar{G}_p=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{T^{r+p}}{(r+p)!}\sum_{s_1=0}^{r}\sum_{s_2=0}^{s_1}\dots\sum_{s_p=0}^{s_{p-1}}A^{s_p}BA^{s_{p-1}-s_p}B\dots BA^{r-s_1}.$$

Основное отличие частного случая от общего состоит в том, что число членов в дискретной модели конечное. Кроме того, формулы для вычисления матриц в дискретной модели более простые.

4. Пример. Рассмотрим билинейную систему (1), где [5]

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

В этом примере матрицы A и B нильпотентные и одновременно треугольные размера 3×3. Следовательно, дискретная модель этой системы имеет не больше чем 3 члена

$$x(kT+T)=\bar{F}x(kT)+\bar{G}_1x(kT)u(kT)+\bar{G}_2x(kT)u^2(kT),$$

где

$$\bar{F}=I+TA+\frac{T^2}{2!}A^2,$$

$$\bar{G}_1=TB+\frac{T^2}{2!}(BA+AB)+\frac{T^3}{3!}(BA^2+ABA+A^2B),$$

$$\bar{G}_2=\frac{T^2}{2!}B^2+\frac{T^3}{3!}(B^2A+BAB+AB^2)+$$

$$+\frac{T^4}{4!}(B^2A^2+BABA+AB^2A+BA^2B+ABAB+A^2B^2).$$

Окончательно получим:

$$x(kT+T)=\begin{bmatrix}1&0&0\\T&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x(kT)+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\T&0&0\end{bmatrix}x(kT)u(kT).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fliess, M., Normand-Cyrot, D.* Proc. 6th IFAC Symp. on Ident. and System Param. Estim., 1, 511—514 (1983).
2. *Svoronos, S., Stephanopoulos, G., Aris, R.* Int. J. Contr., 31, № 1, 109—126 (1980).
3. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., «Наука», 1976.
4. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., «Наука», 1972.
5. *Graselli, O., Isidori, A.* Proc. JACC, 1423—1427 (1977).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
2/VII 1985