EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.3.07

УДК 510

Г. МИНЦ

ИСЧИСЛЕНИЯ РЕЗОЛЮЦИЙ ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

(Представил Э. Тыугу)

Введение

Метод резолюций [1] был введен для доказательства теорем классической логики и основанных на ней аксиоматических теорий. В [2] описаны модификации этого метода, корректные и полные для интуиционистской логики и пропозиционального модального исчисления $S5$. Здесь мы предложим простую модификацию классического правила резолюции, позволяющую получить корректные и полные системы для наиболее «популярных» модальных логик, в частности для $S4$, K, $K4$, T, Br, G. В действительности будет описана общая схема, позволяющая устанавливать полноту построенного исчисления для модальных систем, обладающих генценовскими вариантами со свойством подформульности, а на примере систем G, Br будет показано, как можно справиться с небольшими нарушениями свойства подформульности.

1. Общая схема метода резолюций и ее конкретизация для классического исчисления высказываний

Метод резолюций для данной логической системы C определяется заданием формул специального вида, называемых *дизъюнктами*, правила (или правил) вывода $\mathfrak{R}$, позволяющего получать из одних дизъюнктов другие и называемого *правилом резолюции*, а также алгоритма *редукции* произвольной формулы F системы C к конечному списку D_F дизъюнктов. *Полнота* метода резолюций означает, что выводимость формулы F в системе C влечет выводимость специального пустого дизъюнкта из дизъюнктов D_F по правилу $\mathfrak{R}$. *Корректность* — это обратная импликация: выводимость пустого дизъюнкта из D_F влечет выводимость F в системе C.

Напомним, как эта схема конкретизируется для классического исчисления высказываний. Мы воспроизведем с большой подробностью имеющиеся в литературе определения и доказательства, чтобы иметь возможность сослаться на них в дальнейшем и дать читателю войти в курс дела.

В этом случае *литерами* называются пропозициональные переменные и их отрицания. Если L — литера, то $\bar{L}$ обозначает контрарную литеру, т. е. результат дописывания отрицания, если L его не содержала, и результат стирания отрицания, если L его содержала. *Дизъюнкт* — это любая дизъюнкция литер. *Пустой* дизъюнкт, не содержащий ни одной литеры, обозначается через $\varnothing$ и отождествляется с константой «ложь». Стандартное соглашение позволяет отождествлять дизъюнкты, различающиеся лишь порядком литер, и сокращать повторения литер в дизъюнкте, т. е. рассматривать дизъюнкты как множества литер. *Пра-*

вило резолюций для классического исчисления высказываний имеет вид

$$\frac{D \vee L;\ \ D' \vee \bar{L}}{D \vee D'}. \tag{1.1}$$

Мы будем обозначать его через $\mathfrak{R}$.

В литературе описаны два метода редукции произвольной формулы классического исчисления высказываний к системе дизъюнктов. Первый состоит в приведении отрицания рассматриваемой формулы к конъюнктивной нормальной форме (к. н. ф.) согласно хорошо известному алгоритму, включающему, в частности, применение дистрибутивности. Он приводит (в худшем случае) к экспоненциальному разбуханию обрабатываемой формулы и ничем не лучше приведения к к. н. ф. самой формулы (а не ее отрицания), что сразу дает ответ на вопрос о выводимости. Второй алгоритм редукции к системе дизъюнктов, который и будет для нас образцом, состоит во *введении новых переменных* с целью уменьшения сложности рассматриваемой формулы. Мы оформим его в терминах *секвенций* $K \to \Phi$, где Φ — формула, а K — конъюнкция дизъюнктов. Каждый шаг работы алгоритма будет перерабатывать такую секвенцию в $K' \to \Phi'$, где K' содержит K, а формула Φ' проще, чем Φ, до тех пор, пока это возможно, т. е. пока Φ не будет сведена к литере. Когда это произойдет, искомой системой дизъюнктов будет объявлена $\bar{K}, \bar{\Phi}$, где $\bar{K}$ — результат «рассыпания» K на дизъюнкты (т. е. замены конъюнкций на запятые), а $\bar{\Phi}$ — литера, контрарная Φ. Мы применяем символику $\Phi[A]$, чтобы выделить некоторое вхождение (или несколько вхождений) формулы A в Φ. В приводимых ниже схемах преобразования x обозначает новую пропозициональную переменную, т. е. x не входит в K, Φ. Конъюнкция добавляемых в K дизъюнкций эквивалентна формуле $(x \leftrightarrow A)$, где A — формула, заменяемая на x.

$$\begin{aligned}
&K \to \Phi[a \,\&\, b] \models K \,\&\, (\bar{a} \vee \bar{b} \vee x) \,\&\, (\bar{x} \vee a) \,\&\, (\bar{x} \vee b) \to \Phi[x],\\
&K \to \Phi[a \vee b] \models K \,\&\, (\bar{x} \vee a \vee b) \,\&\, (\bar{a} \vee x) \,\&\, (\bar{b} \vee x) \to \Phi[x],\\
&K \to \Phi[a \supset b] \models K \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{a} \vee b) \,\&\, (a \vee x) \,\&\, (\bar{b} \vee x) \to \Phi[x],\\
&K \to \Phi[\neg a] \models K \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{a}) \,\&\, (a \vee x) \to \Phi[x].
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Посредством K_Φ (в случае классического исчисления высказываний) обозначим конъюнкцию дизъюнктов, получающуюся из $\to \Phi$ в результате последовательного применения этих преобразований, пока это возможно, с последующим перенесением литеры влево с отрицанием, как описано выше.

П р и м е р. $\Phi \equiv (((a \supset b) \supset a) \supset a)$. Исходная секвенция $\to \Phi$ последовательно переходит в $(\bar{x} \vee \bar{a} \vee b) \& (a \vee x) \& (\bar{b} \vee x) \to ((x \supset a) \supset a)$ или, короче, $K_1 \to ((x \supset a) \supset a)$; затем в $K_1 \,\&\, (\bar{y} \vee \bar{x} \vee a) \& (x \vee y) \& (\bar{a} \vee y) \to$ $\to y \supset a$; затем в $K_2 \,\&\, (\bar{z} \vee \bar{y} \vee a) \& (y \vee z) \& (\bar{a} \vee z) \,\&\, \bar{z}$, т. е. в K_Φ. Вывод пустого дизъюнкта из получающейся системы дизъюнктов по правилу (1.1) имеет вид

$$\cfrac{\cfrac{a \vee x; \quad \cfrac{\cfrac{y \vee z; \quad \bar{z}}{y;} \quad \bar{y} \vee \bar{x} \vee a}{\bar{x} \vee a}}{a;} \quad \cfrac{\bar{a} \vee z; \quad \bar{z}}{\bar{a}}}{\varnothing}.$$

Доказательство корректности и полноты метода резолюций для классического исчисления высказываний проводится в несколько этапов.

Лемма 1.1. *Формула* Φ *выводима в классическом исчислении высказываний тогда и только тогда, когда формула* K_Φ *противоречива, т. е. выводимо ее отрицание* $\neg K_\Phi$. *Точнее, выводимы импликации*

$$\Phi \supset \neg K_\Phi; \qquad (\neg K_\Phi)^* \supset \Phi, \tag{1.3}$$

где звездочка обозначает некоторую подстановку формул вместо пропозициональных переменных.

Доказательство. Заметим сначала, что импликации, аналогичные (1.3), верны для каждого шага нашего алгоритма редукции, а именно, что для любых формул K, F, A выводимы импликации

$$(K \supset F[A]) \supset (K \,\&\, (x \leftrightarrow A) \supset F[x]);$$

$$(K \,\&\, (x \leftrightarrow A) \supset F[x])^* \supset (K \supset F[A]),$$

где звездочка означает подстановку A вместо переменной x. Поэтому, если $K \to L$ — результат предпоследнего шага работы алгоритма редукции (перед перенесением литеры L влево с отрицанием), то имеют место импликации $\Phi \supset (K \supset L)$; $(K \supset L)^* \supset \Phi$. Остается вспомнить, что $K_\Phi \equiv K \,\&\, \bar{L}$. Лемма доказана.

Следующее очевидное утверждение обосновывает корректность правила (1.1), а тем самым и метода резолюций в целом.

Лемма 1.2. *Конъюнкция посылок правила* (1.1) *влечет его заключение.*

Доказательство. $(D \vee L) \,\&\, (D' \vee \bar{L}) \to (D \vee D' \vee L) \,\&\, (D \,\&\, D' \vee \bar{L}) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow D \vee D' \vee (L \,\&\, \bar{L}) \leftrightarrow D \vee D'$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.1. (*Корректность метода резолюций*). *Если* $\varnothing$ *выводим из* D_Φ *по правилу* (1.1), *то формула* Φ *выводима в классическом исчислении высказываний.*

Доказательство. Пусть $\varnothing$ выводим из D_Φ по правилу (1.1). Тогда по лемме 1.2 конъюнкция дизъюнктов из D_Φ, т. е. формула K_Φ влечет константу «ложь». Тем самым K_Φ противоречива, и в силу леммы 1.1 выводима Φ, что и требовалось.

Полнота метода резолюции устанавливается чуть более сложно. Она основана на следующих трех утверждениях о выводимости по правилу (1), которую мы будем обозначать через $\vdash$. Будем говорить, что дизъюнкт D' — *ослабление* дизъюнкта D (или что D — *усиление* дизъюнкта D') и писать

$$\frac{D}{\overline{D'}} \quad \text{или} \quad D \,//\, D',$$

если D содержится в D' как множество, т. е. каждая литера из D входит и в D'. Иными словами, D' получается из D дописываниями, а D из D' — вычеркиваниями литер.

Запись

$$\frac{\Gamma \vdash D}{\Gamma' \vdash D'} \quad \text{или} \quad \Gamma \vdash D \,/\, \Gamma' \vdash D' \tag{1.4}$$

будет означать, что правило (1.4) *допустимо* с точностью до усиления, точнее, что выводимость дизъюнкта D из списка дизъюнктов Γ по правилу (1.1) влечет выводимость из списка Γ′ некоторого дизъюнкта, усиливающего дизъюнкт D'.

Лемма 1.3. *Выводимость по правилу* $\mathfrak{R}$ *монотонна относительно усиления. Точнее, из того, что* $\Gamma \vdash D$ *и каждый дизъюнкт из списка* Γ′ —

усиление некоторого дизъюнкта из Γ, *следует* $\Gamma' \vdash D'$ *для некоторого усиления* D' *дизъюнкта* D, *причем новый вывод отличается от данного разве лишь вычеркиваниями дизъюнктивных членов и целых применений правила* $\mathfrak{R}$.

Доказательство проводится индукцией по данному выводу $\Gamma \vdash D$. Если $D \in \Gamma$ (базис индукции), то в качестве D' берем тот дизъюнкт из Γ', который усиливает D.

Индукционный переход следует из монотонности правила $\mathfrak{R}$. Действительно, пусть последнее применение правила $\mathfrak{R}$ в данном выводе имело вид

$$\frac{E \vee L;\quad F \vee \bar{L}}{E \vee F}\ (\mathfrak{R}).$$

Если усиление левой посылки, которое существует по индукционному предположению, имеет вид E', т. е. вычеркивается литера L, то искомое усиление заключения тоже E', и рассматриваемое применение правила $\mathfrak{R}$ вычеркивается. Аналогично поступаем в случае, когда усиление правой посылки имеет вид F'. В остальных случаях новое применение правила имеет вид

$$\frac{E' \vee L;\quad F' \vee \bar{L}}{E' \vee F'},$$

что и требуется.

Лемма 1.4. $\Gamma, D \vdash E$ / $\Gamma, (D \vee D') \vdash E \vee D'$.

Доказательство. По существу почти достаточно приписать дизъюнктивный член D' ко всем дизъюнктам данного вывода, зависящим от D. Более подробное рассуждение использует индукцию по длине вывода, т. е. количеству применений правила (1.1).

Базис индукции: E — один из дизъюнктов списка Γ, D. Если E совпадает с D, то $E \vee D'$ совпадает с $D \vee D'$, и все очевидно. Если же E принадлежит списку Γ, то в качестве искомого дизъюнкта, усиливающего $E \vee D'$, берем E.

Индукционный переход. Рассмотрим последнее применение правила (1.1) в данном выводе:

$$\frac{E \vee L;\quad F \vee \bar{L}}{E \vee F}. \tag{1.5}$$

Заметим, что приписывание дизъюнктивного члена D' сохраняет правило (1.1), и в силу леммы 1.4, это правило инвариантно относительно усиления. Поэтому, применяя индукционное предположение к посылкам правила (1.5), мы устанавливаем нужное свойство его заключения, что и требуется.

В дальнейшем мы часто будем работать с точностью до усиления.

Для доказательства полноты метода резолюций рассмотрим специальное исчисление, выводимыми объектами которого будут (противоречивые) конечные множества дизъюнктов.

Исчисление $\mathfrak{T}$.

Аксиомы $\Gamma, L, \bar{L}$.

Правило вывода

$$\frac{\Gamma, D;\quad \Gamma, D'}{\Gamma, D \vee D'}. \tag{1.6}$$

Лемма 1.5. *Список дизъюнктов противоречив тогда и только тогда, когда он выводим в исчислении* $\mathfrak{T}$, *т. е.* $\mathfrak{T}$ *корректно и полно.*

Доказательство. Корректность (из выводимости в $\mathfrak{T}$ следует противоречивость) без труда доказывается индукцией по длине вывода в $\mathfrak{T}$. Полноту докажем индукцией по количеству вхождений знака дизъюнкции в Γ.

Базис индукции — Γ состоит из литер. Тогда противоречивость Γ эквивалентна наличию контрарной пары L, $\bar{L}$, т. е. тому, что Γ — аксиома исчисления $\mathfrak{T}$.

Индукционный переход: $\Gamma \equiv \Gamma', D \vee D'$. Тогда противоречивость Γ эквивалентна противоречивости обоих множеств Γ', D и Γ', D'. Применяя индукционное предположение и правило (1.6), завершаем доказательство.

Лемма 1.6.

$$\frac{\Gamma, D \vdash \varnothing; \quad \Gamma, D' \vdash \varnothing}{\Gamma, D \vee D' \vdash \varnothing},$$

где $\vdash$ означает выводимость по правилу $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Применяя лемму 1.5 к данному выводу пустого дизъюнкта из списка Γ, D, получаем вывод дизъюнкта D' из $\Gamma, D \vee D'$.

Теперь второй данный вывод (пустого дизъюнкта из списка Γ, D') позволяет получить искомый вывод пустого дизъюнкта из списка $\Gamma, \ D \vee D'$.

Графически:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\Gamma \arrow[dr] & & D \vee D' \arrow[dl] \\
\Gamma \arrow[dr] & D' \arrow[d] & \\
& \varnothing &
\end{tikzcd}$$

Теорема 1.2. *Если конъюнкция дизъюнктов из списка Γ противоречива, то $\Gamma \vdash \varnothing$.*

Доказательство. В силу леммы 1.5 достаточно применить индукцию по длине вывода в исчислении $\mathfrak{T}$. Базис индукции обосновывается с помощью применения правила $\mathfrak{R}$, а индукционный переход — с помощью леммы 1.6.

Теорема 1.3 (*Полнота метода резолюций*). *Если Φ выводима в классическом исчислении высказываний, то $D_\Phi \vdash \varnothing$.*

Доказательство. По лемме 1.1 формула K_Φ противоречива, так что теорема 1.2 дает искомый результат.

Запишем теперь правило (1.1) в виде

$$\frac{\dfrac{D \vee L}{\overline{D \vee D' \vee L}}; \qquad \dfrac{D' \vee \bar{L}}{\overline{D \vee D' \vee \bar{L}}}}{D \vee D'}.$$

Мы видим, что с точностью до ослаблений правило $\mathfrak{R}$ можно заменить на правило

$$\frac{D \vee L; \ D \vee \bar{L}}{D}, \quad \text{что эквивалентно} \quad \frac{D \vee L; \ D \vee \bar{L}}{D \vee \varnothing} \qquad (1.7)$$

в силу нашего соглашения об отождествлении пустого дизъюнкта с пустым множеством. Именно эта последняя формулировка, переписанная в виде

$$\frac{\Sigma[L];\quad \Sigma[\bar{L}]}{\Sigma[\varnothing]}, \tag{1.8}$$

и послужит образцом для обобщения.

2. Метод резолюций для модальной логики

В этом разделе буквы D, E, F и они же со штрихами и индексами будут обозначать дизъюнкции литер и выражений вида $\Box L$, $\langle\rangle L$, где $\langle\rangle$ — знак возможности.

Дизъюнктами будем считать любые выражения вида

$$D_1 \vee \Box(D_2 \vee \Box(D_3 \vee \ldots \vee \Box(D_{n-1} \vee \Box D_n)\ldots)), \tag{2.1}$$

где допускается, в частности, $n=0$ (пустой дизъюнкт) или $n=1$, т. е. дизъюнкты в смысле раздела 1 являются дизъюнктами и в новом смысле. *Правила упрощения* — это $\Box\varnothing \mapsto \varnothing$, а также использованные и раньше сокращения повторений и вычеркивание пустых дизъюнктивных членов (которые будут возникать при «буквальном» применении правила резолюции — см. правило (1.7)).

Правило резолюции будет иметь вид

$$\frac{\Sigma[L];\quad \Sigma[\bar{L}]}{\Sigma[\varnothing]} \qquad \frac{\Sigma[\Box L];\quad \Sigma[\langle\rangle\bar{L}]}{\Sigma[\varnothing]}, \tag{R}$$

т. е. тот же вид, что правило (1.8) раздела 1, если допускать там, чтобы L имел вид $\Box L'$, где L' — литера, и учесть, что $\langle\rangle A$ можно во всех рассматриваемых системах определить как $\neg\Box\bar{A}$, т. е. $\Box L$ и $\langle\rangle\bar{L}$ контрарны.

Гораздо более важную роль, чем в разделе 1, будут играть *правила ослабления*. Именно они будут изменяться от одной модальной системы к другой. В дополнение к дописыванию дизъюнктивных членов, использованному в разделе 1, здесь будут применяться и другие ослабляющие преобразования.

$$\begin{array}{ll}
D \mapsto D \vee D' & (\mapsto \vee) \\
\Box D \mapsto D & (\Box \mapsto) \\
\Box D \mapsto \Box(D' \vee \Box D) & (\Box \mapsto \Box \vee \Box) \\
\Box(\langle\rangle L \vee D) \mapsto \langle\rangle L \vee \Box D & (\Box\langle\rangle \mapsto \langle\rangle \vee \Box) \\
\Box L \mapsto \langle\rangle L & (\Box \mapsto \langle\rangle) \\
\Box(\Box L \vee D) \mapsto L \vee \Box D & (\Box \mapsto \Box).
\end{array} \tag{2.2}$$

Эти преобразования разрешается применять к любому из D_i в (2.1) при условии, что результат снова имеет вид (2.1).

Вот список ослабляющих преобразований, допустимых в каждой из рассматриваемых модальных систем (аксиоматика этих систем приведена ниже)

$$\begin{array}{ll}
K & (\mapsto \vee) \\
K4 & (\mapsto \vee,\ \Box \mapsto \Box \vee \Box) \\
T & (\mapsto \vee,\ \Box \mapsto) \\
S4 & (\mapsto \vee;\ \Box \mapsto,\ \Box \mapsto \Box \vee \Box) \\
G & (\mapsto \vee,\ \Box \mapsto \Box \vee \Box,\ \Box\langle\rangle \mapsto \langle\rangle \vee \Box,\ \Box \mapsto \langle\rangle) \\
Br & (\mapsto \vee,\ \Box \mapsto,\ \Box \mapsto \Box).
\end{array} \tag{2.3}$$

В системе G будет использовано дополнительное правило резолюции

$$\frac{\Sigma[\Box(\langle\rangle L \vee \bar{L})];\quad \Sigma[\langle\rangle L]}{\Sigma[\varnothing]}. \tag{2.4}$$

Получившийся вариант системы S будем обозначать через SR. Таким образом, мы рассматриваем системы KR, $K4R$, TR, $S4R$, GR, BrR.

Запись

$$\frac{D}{\overline{D'}} \quad \text{или} \quad D\,//\,D' \tag{2.5}$$

будет теперь обозначать, что D' получается из D серией ослабляющих преобразований, допустимых в рассматриваемой системе.

Запись

$$\Gamma \vdash \Sigma$$

означает теперь, что Σ получается из дизъюнктов, входящих в Γ, серией применений правила (R) и ослаблений (2.5), причем ослабления должны непосредственно предшествовать применению правила (R). Иными словами, вывод состоит из серии применений правил вида

$$\frac{\dfrac{\Sigma_1}{\overline{\Sigma[L]}};\ \dfrac{\Sigma_2}{\overline{\Sigma[\bar{L}]}}}{\Sigma[\varnothing]}, \qquad \frac{\dfrac{\Sigma_1}{\overline{\Sigma[\Box L]}};\ \dfrac{\Sigma_2}{\overline{\Sigma[\langle\rangle \bar{L}]}}}{\Sigma[\varnothing]}, \quad (R)$$

которые мы также будем обозначать через (R), (а также аналогичных фигур для правила (2.4) в случае исчисления G). Длиной вывода будем считать количество применений правила (R) при новом понимании.

Редукция произвольной формулы Φ к конъюнкции дизъюнктов K_Φ требует модификации преобразований (1.2), так как теорема об эквивалентной замене, нужная для доказательства леммы 1.1, приобретает в $S4$ вид

$$\Box(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\Phi[A] \leftrightarrow \Phi[B]), \tag{2.6}$$

а в более слабых системах, содержащих K, вид

$$\Box^{(n)}(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\Phi[A] \leftrightarrow \Phi[B]). \tag{2.7}$$

Здесь $\Box^{(n)}F$ обозначает $F \,\&\, \Box F \,\&\, \Box\Box F \,\&\ldots\&\, \Box\ldots\Box F$ (n раз), а n — модальную степень заменяемых вхождений A в формулу Φ, т. е. максимальное число вложенных вхождений модальных знаков $\Box$, $\langle\rangle$, в области действия которых находятся заменяемые вхождения A. Заметим, что для систем, содержащих 4-аксиому $\Box A \rightarrow \Box\Box A$, т. е. $S4$, $K4$ и G, в (2.7) достаточно брать $n=1$, а для систем, содержащих T-аксиому, $\Box A \rightarrow A$, т. е. T и $S4$, Br, формулу $\Box^{(n)}A$ можно заменить на $\Box^n A$.

Как только найдена подходящая формулировка теоремы об эквивалентной замене, легко написать нужную редукцию глубины. Будем для простоты записи считать, что в исходную формулу входят лишь связки $\&$, $\neg$, $\Box$.

$$\begin{aligned}
&K \rightarrow \Phi[a \,\&\, b] \mid\Rightarrow K \,\&\, \Box^{(n)}(\bar{a} \vee \bar{b} \vee x) \,\&\, \Box^{(n)}(\bar{x} \vee a) \,\&\\
&\qquad \&\, \Box^{(n)}(\bar{x} \vee b) \rightarrow \Phi[x],\\
&K \rightarrow \Phi[\neg a] \mid\Rightarrow K \,\&\, \Box^{(n)}(\bar{x} \vee \bar{a}) \,\&\, \Box^{(n)}(a \vee x) \rightarrow \Phi[x], && (2.8)\\
&K \rightarrow \Phi[\Box a] \mid\Rightarrow K \,\&\, \Box^{(n)}(\bar{x} \vee \Box a) \,\&\, \Box^{(n)}(x \vee \langle\rangle \bar{a}) \rightarrow \Phi[x].
\end{aligned}$$

Читатель легко перепишет соотношения из (2.2) для остальных связок.

Обозначение K_Φ вводится теперь так же, как в разделе 1, т. е. K_Φ обозначает конъюнкцию дизъюнктов, получающуюся из $\rightarrow\Phi$ в результате последовательного применения преобразований (2.8), пока это возможно, с последующим перенесением литеры влево с отрицанием. D_Φ, как и раньше, — результат вычеркивания & из K_Φ.

Пример 1. Вывод пустого дизъюнкта из $\Box(\bar a \vee b)$, $\Box a$, $\langle\rangle \bar b$ в системе KK имеет вид

$$\frac{\dfrac{\Box(\bar a \vee b);\qquad \dfrac{\Box a}{\Box(a \vee b)}}{\Box b;}\qquad \langle\rangle \bar b}{\varnothing}.$$

Эта система дизъюнктов получается из K-аксиомы $\Box(a \supset b) \& \Box a \supset \Box b$ более быстрым путем, чем по общему алгоритму.

Пример 2. K-аксиома $\Box(a \supset b) \& \Box a \supset \Box b$ приводится в рамках общего алгоритма к системе дизъюнктов

$$\bar x \vee \bar a \vee b,\ a \vee x,\ \bar b \vee x,\ \Box(\bar x \vee \bar a \vee b),\ \Box(a \vee x),\ \Box(\bar b \vee x)$$

$$\bar y \vee \Box x,\ y \vee \langle\rangle \bar x,\ \Box(\bar y \vee \Box x),\ \Box(y \vee \langle\rangle \bar x),$$

$$\bar z \vee \Box a,\ z \vee \langle\rangle \bar a,\ \Box(\bar z \vee \Box a),\ \Box(z \vee \langle\rangle \bar a),$$

$$\bar u \vee \Box b,\ u \vee \langle\rangle \bar b,\ \Box(\bar u \vee \Box b),\ \Box(u \vee \langle\rangle \bar b),$$

$$\bar y \vee \bar z \vee v,\ \bar v \vee y,\ \bar v \vee z,\ \bar w \vee \bar v \vee u,\ v \vee w,\ \bar u \vee w,\ \bar w.$$

Вывод пустого дизъюнкта по правилу (R) имеет вид

$$\frac{\dfrac{D_3}{\langle\rangle \bar b};\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_1}{\Box x}}{\Box(x \vee \bar a \vee b)};\quad \Box(\bar x \vee \bar a \vee b)}{\Box(\bar a \vee b);}\qquad \dfrac{\dfrac{D_2}{\Box a}}{\Box(a \vee b)}}{\Box b}}{\varnothing}, \tag{2.9}$$

где D_1, D_2, D_3 — выводы по обычному (немодальному) правилу резолюций.

Доказательство корректности метода резолюций не представляет теперь труда — оно копирует доказательства из раздела 1. S обозначает любую из рассматриваемых модальных систем.

Лемма 2.1. *Формула* Φ *выводима в обычной формулировке системы* S *тогда и только тогда, когда* K_Φ *противоречива в* S, *т. е.* $\neg K_\Phi$ *выводима. Точнее, в* S *выводимы импликации*

$$\Phi \supset \neg K_\Phi; \qquad (\neg K_\Phi)^* \supset \Phi. \tag{2.10}$$

Лемма 2.2. *Конъюнкция посылок правила* (R) *(посылка правила ослабления) влечет его заключение.*

Доказательство. Правило (R). Индукцией по построению дизъюнкта Σ (точнее, по числу n из (2.1)) легко доказать, что выводимо

$$\Sigma[A] \& \Sigma[B] \supset \Sigma[A \& B], \tag{2.11}$$

что при $B \equiv \bar A$ дает $\Sigma[A \& \bar A]$, т. е. $\Sigma[\varnothing]$.

Правила ослабления. Так как во всех рассматриваемых системах действуют правила

$$\frac{A \to B}{F \vee A \to F \vee B} \qquad \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B},$$

то достаточно заметить, что в каждой из рассматриваемых систем выводимы импликации, соответствующие ее правилам ослабления из (3). Нужные выводы легко построить, например, с помощью генценовских вариантов, приводимых ниже.

Теорема 2.1. *(Корректность метода резолюций). Если* $\varnothing$ *выводим из* D_Φ *в системе SR, то* Φ *выводима в S.*

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 1.1.

Полнота R-формулировки устанавливается по той же схеме, что в разделе 1 однако аналог леммы 1.6 требует некоторых усилий.

Генценовские формулировки рассматриваемых систем для доказательства противоречивости множеств дизъюнктов содержат исчисление $\mathfrak{F}$ из раздела 1, но различаются модальными правилами.

Пропозициональные постулаты

$$\Gamma, L, \bar{L}; \qquad \frac{\Gamma, D; \quad \Gamma, D'}{\Gamma, D \vee D'}.$$

Модальные постулаты.

Система K. $\dfrac{\Gamma, L}{\Pi, \Box\Gamma, \langle\rangle L}$ $(\langle\rangle K)$.

Система $K4$. $\dfrac{\Gamma, \Box\Gamma, L}{\Pi, \Box\Gamma, \langle\rangle L}$ $(\langle\rangle K4)$.

Система T. $\langle\rangle K$ и $\dfrac{A, \Box A, \Sigma}{\Box A, \Sigma}$ $(\Box T)$.

Система $S4$. $\dfrac{\Box\Gamma, L}{\Pi, \Box\Gamma, \langle\rangle L}$ $(\langle\rangle S4)$ и $(\Box T)$.

Система G. $\dfrac{\Gamma, \Box\Gamma, \Box\bar{L}, L}{\Pi, \Box\Gamma, \langle\rangle L}$ $(\langle\rangle G)$.

Здесь $\Box\Gamma$ обозначает результат приписывания $\Box$ ко всем дизъюнктам из Γ.

Система Br. $\langle\rangle K$, $\Box T$ и «аналитическое сечение»

$$\frac{L, \Gamma; \quad \Box\langle\rangle\bar{L}, \Gamma}{\Gamma} (\mathrm{cut}_{Br}),$$

где формула $\Box L$ входит в самое нижнее множество рассматриваемого вывода.

Лемма 2.3. *Выводимость в системе SR монотонна относительно усиления: из выводимости* $\Gamma \vdash D$ *и того, что каждый дизъюнкт из* Γ' — *усиление некоторого дизъюнкта из* Γ *(по правилам, принятым в S), следует, что* $\Gamma' \vdash D'$ *для некоторого усиления* D' *дизъюнкта* D.

Доказательство. В отличие от обычных формулировок метода резолюций для классической логики мы не потребовали, чтобы ослабления, предшествующие правилу (R), были минимальными. Поэтому доказательство еще проще, чем в случае леммы 1.3. Если данный вывод $\Gamma \vdash D$ содержит хотя бы одно применение правила R, то можно взять $D' \equiv D$, добавив нужные ослабления $E'//E$ для $E' \in \Gamma$. Если же $D \in \Gamma$, то достаточно взять соответствующий $D' \in \Gamma'$, что завершает доказательство.

Лемма 2.4. $\Gamma, D \vdash E \ / \ \Gamma, D \vee D' \vdash E \vee D'$.

Доказательство такое же, как в разделе 1 (лемма 1.4), но теперь приходится рассмотреть не только правило (R), но и все правила ослабления.

Лемма 2.5. *Список дизъюнктов противоречив тогда и только тогда, когда он выводим по правилам нашей генценовской формулировки системы* S.

Доказательство. Стандартные генценовские формулировки рассматриваемых систем [3–5] имеют дело с секвенциями $\Gamma \to \Delta$. Заменяя $\Gamma \to \Delta$ на $\Gamma, \overline{\Delta}$ по всему выводу, получаем вывод по нашим правилам. Для Br доказательство использует результаты из [6].

Лемма 2.6. (1) *Во всех рассматриваемых системах*

$$\frac{L, \Gamma \vdash \Sigma \ \ и \ \ L \not\Leftarrow \Sigma}{\Gamma \vdash \bar{L} \vee \Sigma}.$$

(2) *В системе* GR $\quad \dfrac{\Sigma\, [\langle\rangle L]}{\langle\rangle L \vee \Sigma\, [\varnothing]}$.

(3) *В системе* GR $\quad \dfrac{\Box L, \Gamma \vdash \Sigma \ \ и \ \ \Sigma \not\Leftarrow \Box L, \Gamma}{\Gamma \vdash \langle\rangle \bar{L} \vee \Sigma}$.

(4) *В системах* KR *и* TR $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Box\Gamma \vdash \Box\Sigma}$.

(5) *В системах* $K4R$ *и* GR $\quad \dfrac{\Gamma, \Box\Gamma \vdash \Sigma}{\Box\Gamma \vdash \Box\Sigma}$.

(6) *В системе* $S4R$ $\quad \dfrac{\Box\Gamma \vdash \Sigma}{\Box\Gamma \vdash \Box\Sigma}$.

(7) *В системе* BrR $\quad \dfrac{\Box \langle\rangle L, \Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \bar{L} \vee \Sigma}$.

Доказательство. (1). Если L вообще не используется в данном выводе $L, \Gamma \vdash \Sigma$, то $\Gamma \vdash \Sigma \,//\, \Gamma \vdash \bar{L} \vee \Sigma$. В противном случае добавим дизъюнктивный член $\bar{L}$ ко всем дизъюнктам данного вывода, которые зависят от L, и проверим, что вывод сохранится. В проверке нуждаются только применения правила (R), в которых L — одна из посылок (с точностью до ослаблений). Интересен только случай, когда L — вычеркиваемая литера. Так как из всех правил ослабления к L применимо только $(\mapsto\vee)$, рассматриваемое применение правила (R) имеет вид

$$\frac{\dfrac{L}{L \vee \Sigma;} \quad \dfrac{\Theta}{\bar{L} \vee \Sigma}}{\Sigma}.$$

Теперь достаточно заменить дизъюнкт Σ на Θ и вычеркнуть рассматриваемое применение правила (R).

(2) Записав $\Sigma[\langle\rangle L]$ в виде (1), выносим $\langle\rangle L$ из области действия $\Box$, пользуясь преобразованием $\Box\langle\rangle \mapsto \langle\rangle \vee \Box$.

(3) Снова нужно рассмотреть лишь случаи, когда $\Box L$ непосредственно участвует в применении правила (R). Фигура

$$\dfrac{\dfrac{\Box L}{\overline{\Sigma[\Box L];}} \qquad \dfrac{\Theta}{\overline{\Sigma[\Box\bar{L}]}}}{\Sigma[\Box\varnothing]\equiv\Sigma[\varnothing]}$$

заменяется на Θ, а соотношение $\Theta//\ \bar{L}\vee\Sigma[\varnothing]$ обосновывается с помощью соотношений (2) и $(\Box \mapsto \langle\rangle)$:

$$\Theta//\Sigma[\Box\bar{L}]//\Sigma[\langle\rangle\bar{L}]//\langle\rangle\bar{L}\vee\Sigma[\varnothing].$$

Случаи, когда вычеркивается пара $\Box L$, $\langle\rangle\bar{L}$ или применяется правило (4), еще проще — не нужно применять $\Box \mapsto \langle\rangle$.

(4)—(6) Применить индукцию по длине данного вывода.

(7) Поступаем так же, как в случае (1). Применения правила резолюции, в которых участвует $\Box\langle\rangle L$, имеют вид

$$\dfrac{\dfrac{\Box\langle\rangle L}{\overline{\langle\rangle L\vee\Sigma;}} \qquad \dfrac{\Theta}{\overline{\Box\bar{L}\vee\Sigma}}}{\Sigma} \quad \text{или} \quad \dfrac{\dfrac{\Box\langle\rangle L}{\overline{D\vee\Box(\langle\rangle L\vee E);}} \qquad \dfrac{\Theta}{\overline{D\vee\Box(\Box\bar{L}\vee E)}}}{D\vee\Box E}.$$

Заменяем рассматриваемый переход на фигуру

$$\dfrac{\dfrac{\Theta}{\overline{\Box\bar{L}\vee\Sigma}}}{\overline{\bar{L}\vee\Sigma}} \quad \text{или} \quad \dfrac{\dfrac{\Theta}{\overline{D\vee\Box(\Box\bar{L}\vee E)}}}{D\vee\bar{L}\vee\Box\Sigma}.$$

Теорема 2.2. *Если список дизъюнктов* Γ *противоречив в* S, *то* $\Gamma\vdash\varnothing$ *в* SR.

Доказательство. Как и в теореме 1.2, применим индукцию по длине вывода в нашей генценовской формулировке системы S. Аксиома $\Gamma, L, \bar{L}$ снова переходит в применение правила (R). Остается обосновать переходы, соответствующие правилам вывода.

Правило расщепления дизъюнкции $\Gamma, D;\ \Gamma, E/\Gamma,\ D\vee E$ обосновывается как и раньше:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \dfrac{\Gamma \qquad D\vee E}{E}}{\varnothing},$$

где вывод $\Gamma,\ D\vee E\vdash E$ получается по лемме 2.4.

Правило $\langle\rangle K$. По индукционному предположению имеем $\Gamma,\ L\vdash\varnothing$, по лемме 2.6 (1) получаем $\Gamma\vdash\bar{L}$ или $\Gamma\vdash\varnothing$, по лемме 2.6 (4) $\Box\Gamma\vdash\Box\bar{L}$ или $\Box\Gamma\vdash\varnothing$, и в первом случае нужно применить правило $(R):\Box\bar{L},\ \langle\rangle L\vdash\varnothing$, а во втором $\varnothing$ уже получен.

Правила $\langle\rangle K4$, $\langle\rangle S4$. Переход обосновывается аналогично с помощью леммы 2.6 (5), (6).

Правило $\langle\rangle G$. По индукционному предположению имеем $\Gamma,\ \Box\Gamma,\ \Box\bar{L},\ L\vdash\varnothing$. По лемме 2.6 (1), (3), (5) получаем (с точностью до ослаблений) $\Gamma\vdash\Box(\langle\rangle L\vee\bar{L})$ и остается применить правило (4).

Правило $\Box T$. По индукционному предложению $\Box A, A, \Sigma \vdash \varnothing$. Заменяем все ссылки на A ссылками на $\Box A$ и ослаблением $(\Box \mid\!\!\rightarrow)$.

Правило Cut_{Br}. По индукционному предположению имеем $\Box\langle\rangle\bar{L}, \Gamma \vdash \varnothing$ и $L, \Gamma \vdash \varnothing$. По лемме 2.6 (7) получаем (с точностью до ослаблений) $\Gamma \vdash L$, что вместе с $L, \Gamma \vdash \varnothing$ дает $\Gamma \vdash \varnothing$. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *(Полнота метода резолюции). Если* Φ *выводима в* S, *то* $D_\Phi \vdash \varnothing$ *в* SR.

Применяем лемму 1.1 и теорему 2.2.

Описанная схема применима, по-видимому, ко многим расширениям системы K. Границы ее применимости устанавливаются, однако, хотя бы результатами Л. Л. Максимовой [7] о нарушении интерполяционной теоремы для многих расширений $S4$: пригодная для нашей схемы генценовская формулировка давала бы, вероятно, и интерполяционную теорему. Не исключено, что нашу схему можно изменить, положив в основу исчисление систем семантических таблиц в работе [8] § 10. Тем не менее пока неясно даже, как подойти к исчислению Гжегорчика Grz. генценовский вариант которого [9] получается добавлением к нашей формулировке $S4$ правила

$$\frac{\Box\Gamma,\ \Box(L \vee \Box\bar{L}),\ L}{\Pi;\ \Box\Gamma,\ \langle\rangle L}.$$

В то же время полнота описанной в [2] простой резолюционной формулировки системы $S5$ сразу следует из полноты нашей системы TR и того факта, что в $S5$ возможна редукция к дизъюнктам без итерированных модальностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Робинсон Дж.* Машинно-ориентированная логика, основанная на принципе резолюции. — Киберн. сб., нов. сер., 7. М., «Мир», 1970.
2. *Минц Г. Е.* Тез. 9 Всесоюз. симпозиума по кибернетике, т. 2. М., 1981, 34—36.
3. *Карри Х.* Основания математической логики. М., «Мир», 1969.
4. *Leivant, D.* J. Symbol. Log., **46**, 531—538 (1981).
5. *Фейс Р.* Модальная логика. М., «Наука», 1974.
6. *Минц Г. Е.* Тез. конференции «Прикладная логика». Новосибирск, 1985, 142—145.
7. *Максимова Л. Л.* Алгебра и логика, **18**, № 5, 556—586 (1979).
8. *Минц Г. Е.* В кн.: Модальная логика. М., «Наука», 1974, 422—509.
9. *Дарджания Г. К.* Сообщ. АН Груз. ССР, **116**, № 1, 29—32 (1984).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19/VI 1985

G. MINTS

MODAALNE RESOLUTSIOON

Artiklis on pakutud uus modaalsetes loogikates rakendatav resolutsioonireegel.

G. MINTS

RESOLUTION CALCULI FOR MODAL LOGICS

Resolution method has been introduced for proving theorems of the classical logic. We have defined earlier (at the 9th Soviet Symposium in Cybernetics, 2. Moscow, 1981, 34—36) some modifications of this method which are sound and complete for the intuitionistic predicate calculus and the modal logic S5. Here we propose a simple modification of the classical resolution rule allowing to obtain sound and complete system for most «popular» modal logics, including *S*4, *K*, *K*4, *Br*, *G*. In fact, a general scheme will be described, allowing to establish the completeness of the calculus constructed in this way for modal systems having Gentzen-type formulation with the subformula property. Systems *G* and *Br* are used to illustrate how to proceed when subformula property is violated in an inessential way.