

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА В ДИСКРЕТНО-СЛОИСТОЙ ЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЕ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрен процесс распространения и отражения одномерного акустического импульса в дискретно-слоистой линейной наследственной (вязкоупругой) среде, состоящей из двух полупространств, разделенных слоем. Получены решения, описывающие все возникающие в такой дискретно-слоистой системе волны, для произвольных модифицированных ядер ползучести каждой из однородных сред. Для частного случая, когда слой — наследственная среда с  $E$ -памятью — граничит с обеих сторон с идеальной сжимаемой жидкостью, получены формулы для расчета формы зеркально отраженной от слоя волны и волны, отраженной назад и прошедшей слой один раз в обоих направлениях. Показано влияние наследственных параметров слоя на форму отраженных волн.

Развитие средств дистанционного определения наследственных параметров различных материалов требует такой постановки эксперимента акустодиагностики, при котором регистрируется искажение формы зондирующего импульса при отражении или при прохождении им пластины (слоя), погруженной в жидкость. В качестве жидкости обычно используется вода, которую с достаточной точностью можно считать идеальной сжимаемой жидкостью.

Процесс распространения акустических волн в дискретно-слоистых линейных упругих средах изучен достаточно подробно [1, 2]. Распространение же акустических волн в наследственных (вязкоупругих) средах рассматривалось значительно меньше и требует дальнейшего исследования.

Используя интегральное преобразование Лапласа (или Фурье) по времени, для задачи отражения и прохождения акустического импульса в дискретно-слоистых линейных упругих средах строится точное решение, учитывающее все бесконечные переотражения в слоистой системе [1, 2, 3]. Этим методом была исследована задача о распространении нестационарной акустической волны в системе, состоящей из двух наследственных полупространств, разделенных наследственным слоем [4], где с использованием модифицированных ядер ползучести, введенных в [5], получены формулы, описывающие отражение и прохождение волны через вязкоупругий слой. При этом формулы дают всю бесконечную совокупность волн, возникающих и выходящих из слоя.

Учитывая, что в ходе эксперимента регистрируются последовательно выходящих из слоя импульсов, в данной работе результаты, полученные в [4], будут представлены в таком виде, что позволяют сравнивать данные эксперимента с теоретическими расчетами, проведенными для модели наследственной среды с т. н.  $E$ -памятью [5].

1. Пусть одномерный импульс, который зависит от лагранжевой координаты  $X$  и от времени  $t$ , распространяется в среде, состоящей из области  $0 \leq X \leq L_A$ , занятой однородной средой  $A$ , слоя  $L_A' < X < L_B$ , являющимся однородной средой  $B$ , и полупространства  $X \geq L_B$  — среды  $C$ .



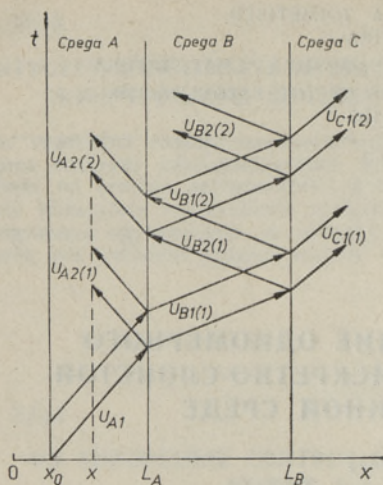


Схема распространения импульсов в слоистой среде.

Величины, относящиеся к средам  $A$ ,  $B$  и  $C$  будем различать соответственно с помощью индексов  $j \in A, B, C$  (рисунок).

Примем обозначения:  $U_j(X, t)$  — продольные перемещения,  $\sigma_j(X, t)$  — продольные напряжения,  $\rho_j$  — плотности и  $E_j$  — «мгновенные модули упругости» сред  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Штрих обозначает производную по  $X$ , а точка — производную по  $t$ .

Для описания процесса распространения одномерных импульсов в наследственных средах  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеем уравнения [5]:

$$c_j U'_{j1}(X, t) + U_{j1}(X, t) + \frac{1}{2} K_{1j}(t) * U_{j1}(X, t) = 0, \quad (1)$$

$$c_j U'_{j2}(X, t) - U_{j2}(X, t) - \frac{1}{2} K_{1j}(t) * U_{j2}(X, t) = 0, \quad (2)$$

где

$$c_j^2 = E_j / \rho_j, \quad j \in A, B, C.$$

Второй индекс, приобретающий значения 1 и 2 введен таким образом, что величины  $U_{j1}(X, t)$  обозначают совокупность импульсов, многократно отраженных и преломленных в слоистой среде, распространяющихся в положительном направлении оси  $X$ , а величины  $U_{j2}(X, t)$  — совокупность таких же импульсов, распространяющихся в противоположном направлении (рисунок).

В уравнениях (1) и (2)  $K_{1j}(t)$  являются модифицированными ядрами ползучести сред  $A$ ,  $B$  и  $C$  и использовано обозначение

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(t - \tau) G(\tau) d\tau.$$

Примем начальные условия в виде

$$U_{jk}(X, 0) = U'_{jk}(X, 0) = 0, \quad j \in A, B, C; \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

В точке  $X = X_0$  может быть задано одно из трех краевых условий, определяющее волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $X$

$$U'_{A1}(X_0, t) = \Phi(t), \quad (4)$$

$$U_{A1}(X_0, t) = -c_A \Phi(t), \quad (5)$$

$$\sigma_{A1}(X_0, t) = E_A \Phi(t). \quad (6)$$

На границах сред при  $X = L_A$  и  $X = L_B$  выполняется равенство нормальных перемещений и напряжений. Используя интегральное преобразование Лапласа

$$FL(X, s) \rightarrow F(X, t),$$



где  $F^L(X, s)$  — изображение оригинала  $F(X, t)$ , из уравнений (1) и (2) с учетом начальных и граничных условий, получим решения, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси  $X$ :

$$U_{A1}^L(X, s) = P_m^L(s) \exp[-\lambda_A(s)X], \quad (7)$$

$$U_{A2}^L(X, s) = P_m^L(s) V_{AB}^L(s) \exp[\lambda_A(s)X], \quad (8)$$

$$U_{B1}^L(X, s) = P_m^L(s) W_{AB}^L(s) \exp[-\lambda_B(s)X], \quad (9)$$

$$U_{B2}^L(X, s) = P_m^L(s) V_{BC}^L(s) \exp[\lambda_B(s)X], \quad (10)$$

$$U_{C1}^L(X, s) = P_m^L(s) W_{BC}^L(s) \exp[-\lambda_C(s)X]. \quad (11)$$

Здесь три функции  $P_m^L(s)$  ( $m=1, 2, 3$ ) определяются краевыми условиями (4)–(6), а

$$\lambda_j(s) = (s/c_j) \left[ 1 + \frac{1}{2} K_{1j}^L(s) \right], \quad j \in A, B, C. \quad (12)$$

Коэффициенты  $V_{jk}^L(s)$  и  $W_{jk}^L(s)$  вычисляются из системы алгебраических уравнений, соответствующих преобразованным граничным условиям, и имеют вид

$$V_{AB}^L(s) = Q_1(s) Q_0^{-1}(s) \exp[-2\lambda_A(s)L_A], \quad (13)$$

$$V_{BC}^L(s) = 2D_{AB}(s) Q_2(s) Q_0^{-1}(s) \exp\{-L_A[\lambda_A(s) + \lambda_B(s)]\}, \quad (14)$$

$$W_{AB}^L(s) = 2D_{AB}(s) Q_3(s) Q_0^{-1}(s) \exp\{L_A[\lambda_B(s) - \lambda_A(s)]\}, \quad (15)$$

$$W_{BC}^L(s) = 4D_{AC}(s) Q_0^{-1}(s) \exp[\lambda_C(s)L_B - \lambda_A(s)L_A], \quad (16)$$

где

$$Q_0(s) = [D_{AB}(s) - 1] Q_2(s) + [D_{AB}(s) + 1] Q_3(s),$$

$$Q_1(s) = [D_{AB}(s) + 1] Q_2(s) + [D_{AB}(s) - 1] Q_3(s),$$

$$Q_2(s) = [D_{BC}(s) - 1] \exp[-\lambda_B(s)(L_B - L_A)],$$

$$Q_3(s) = [D_{BC}(s) + 1] \exp[\lambda_B(s)(L_B - L_A)],$$

$$D_{jk}(s) = Z_{jk} N_k^L(s) / N_j^L(s), \quad j, k \in A, B, C,$$

$$Z_{jk} = (Q_j c_j) / (Q_k c_k), \quad j, k \in A, B, C,$$

$$N_j^L(s) = 1 + \frac{1}{2} K_{1j}^L(s), \quad j \in A, B, C.$$

Используя полученные уравнения, из (7)–(11) получим следующие решения

$$U'_{jkm}(X, t) = (-1)^{k-1} c_A c_j^{-1} \Phi(t) * Q_{jkm}(X, t), \quad (17)$$

$$U_{jkm}(X, t) = -c_A \Phi(t) * P_{jkm}(X, t), \quad (18)$$

$$\sigma_{jkm}(X, t) = (-1)^{k-1} E_j c_A c_j^{-1} \Phi(t) * G_{jkm}(X, t). \quad (19)$$

Здесь третий индекс  $m=1, 2, 3$  относится к краевым условиям (4), (5) и (6) соответственно, а  $Q_{jkm}(X, t)$ ,  $P_{jkm}(X, t)$  и  $G_{jkm}(X, t)$  — функции, подлежащие отысканию по их изображениям



$$Q_{jkm}^L(X, s) = N_j^L(s) P_{jkm}^L(X, s), \quad j \in A, B, C, \quad (20)$$

$$G_{jkm}^L(X, s) = [N_j^L(s)]^{-1} P_{jkm}^L(X, s), \quad k=1, 2; m=1, 2, 3, \quad (21)$$

$$P_{jkm}^L(X, s) = [N_j^L(s)]^{m-2} \Omega_{jk}^L(X, s) \exp[\lambda_A(s) X_0], \quad (22)$$

а функции  $\Omega_{jk}^L(X, s)$  определяются формулами

$$\Omega_{A1}^L(X, s) = \exp[-\lambda_A(s) X], \quad (23)$$

$$\Omega_{A2}^L(X, s) = V_{AB}^L(s) \exp[\lambda_A(s) X], \quad (24)$$

$$\Omega_{B1}^L(X, s) = W_{AB}^L(s) \exp[-\lambda_B(s) X], \quad (25)$$

$$\Omega_{B2}^L(X, s) = V_{BC}^L(s) \exp[\lambda_B(s) X], \quad (26)$$

$$\Omega_{C1}^L(X, s) = W_{BC}^L(s) \exp[-\lambda_C(s) X]. \quad (27)$$

Полученные формулы (17) — (19) описывают волны, распространяющиеся в системе из трех сред  $A$ ,  $B$  и  $C$  с произвольными ядрами наследственности, и при задании модифицированных ядер ползучести конкретного вида позволяют вычислять форму любой волны в такой системе при заданном произвольном краевом условии.

2. Рассмотрим случай, когда акустический импульс отражается от вязкоупругого слоя (наследственная среда  $B$ ), помещенного в идеальную сжимаемую жидкость.

Пусть среда  $B$  — наследственная среда с  $E$ -памятью, модифицированное ядро ползучести которой задано выражением

$$K_{1B}(t) = (\varepsilon_B / \tau_{KB}) \exp(-t / \tau_{KB}),$$

с наследственными параметрами  $\varepsilon_B$  и  $\tau_{KB}$ . Тогда в случае краевого условия (5) из (18) и (24) при  $X_0=0$  легко получить

$$U_{A2}^L(X, t) = -c_A F_{A2}(X, t), \quad (28)$$

где использовано обозначение

$$F_{A2}(X, t) = \Phi(t) * \Omega_{A2}(X, t). \quad (29)$$

Функция  $\Omega_{A2}(X, t)$  подлежит отысканию на основе ее изображения

$$\Omega_{A2}^L(X, s) = V_{AB}^L(s) \exp[(X - 2L_A)s / c_A],$$

а  $V_{AB}^L(s)$  можно представить в виде

$$V_{AB}^L(s) = D(s) \frac{1 - \exp[\varphi_0(s)]}{1 + D^2(s) \exp[\varphi_0(s)]},$$

$$D(s) = \frac{Q(s) - 1}{Q(s) + 1}, \quad \varphi_0(s) = -2\lambda_B(s) [L_B - L_A],$$

$$Q(s) = Z_{AB} \left[ 1 + \frac{1}{2} K_{1B}^L(s) \right],$$

$$K_{1B}^L(s) = \varepsilon_B / (1 + s\tau_{KB}),$$

а величина  $\lambda_B(s)$  определена в (12).



Обозначим

$$l_0 = (L_B - L_A) / c_B \tau_{KB},$$

$$l_1 = (2L_A - X) / c_A \tau_{KB},$$

$$G(s) = - \frac{4Q(s)}{[Q(s) + 1]^2},$$

и представим  $\varphi_0(s)$  в виде

$$\varphi_0(s) = -2l_0 s \tau_{KB} - l_0 \varepsilon_B + \frac{l_0 \varepsilon_B}{1 + s \tau_{KB}}. \quad (30)$$

Тогда функцию  $\Omega_{A_2}^L(X, s)$  можно разложить в ряд

$$\Omega_{A_2}^L(X, s) = D(s) \exp(-l_1 s \tau_{KB}) \{1 + G(s) \exp[\varphi_0(s)] + \\ + G(s) D^2(s) \exp[2\varphi_0(s)] + G(s) D^4(s) \exp[3\varphi_0(s)] + \dots\}, \quad (31)$$

каждое слагаемое в котором соответствует некоторой волне: первое — волне отраженной от границы  $X=L_A$ , второе — волне, отраженной от границы  $X=L_B$ , прошедшей слой в обоих направлениях один раз, третье — два раза и т. д. Из-за громоздкости выражений в формуле (31) рассмотрим только два слагаемых, т. е. зеркально отраженную волну  $U_{A_2(1)}(X, t)$  и волну  $U_{A_2(2)}(X, t)$  (см. рисунок).

3. Пример. Пусть краевое воздействие задано в виде

$$\Phi(t) = A_0 H(t) \sin(\omega t), \quad A_0 = \text{const}, \quad (32)$$

где  $A_0$  — амплитуда воздействия,  $H(t)$  — функция Хевисайда,  $\omega$  — круговая частота. Тогда, свертывая (32) с оригиналом первого слагаемого ряда (31), найдем

$$U_{A_2(1)}(X, \tau_1) = -c_A A_0 H(\tau_1) \{V_0 \sin(g\tau_1) + \\ + A_1 [\exp(-p\tau_1) - \cos(g\tau_1) + pg^{-1} \sin(g\tau_1)]\}, \quad (33)$$

где

$$p = 1 + \frac{Z_{AB} \varepsilon_B}{2(Z_{AB} + 1)},$$

$$A_1 = \frac{Z_{AB} \varepsilon_B g}{h(Z_{AB} + 1)^2},$$

$$\tau_1 = t / \tau_{KB} - l_1, \quad h = p^2 + g^2,$$

$$V_0 = \frac{Z_{AB} - 1}{Z_{AB} + 1}, \quad g = \omega \tau_{KB}.$$

Функция  $U_{A_2(2)}(X, t)$  отыскивается аналогично и имеет вид

$$U_{A_2(2)}(X, \tau_2) = -c_A A_2 H(\tau_2) \int_0^{\tau_2} R(y, \tau_2) e^{-y} I_0(2\sqrt{y\xi}) dy, \quad (34)$$

где

$$R(y, \tau_2) = (A_{21} - A_{22}y + A_{23}y^2) \exp[p(y - \tau_2)] + \\ + A_{24} \cos(gy) + A_{25} \sin(gy),$$

$$A_{21} = D_1 + D_4 \tau_2 + \frac{1}{2} D_5 \tau_2^2, \quad (35)$$

$$A_{22} = D_4 + D_5 \tau_2, \quad (36)$$



$$A_{23} = \frac{1}{2} D_5, \quad (37)$$

$$A_{24} = g^{-1} D_2 \sin(g\tau_2) + D_3 \cos(g\tau_2), \quad (38)$$

$$A_{25} = D_3 \sin(g\tau_2) - g^{-1} D_2 \cos(g\tau_2), \quad (39)$$

$$A_2 = -\frac{4Z_{AB}gA_0}{(Z_{AB}+1)^2} \exp(-\xi),$$

$$\xi = l_0 \varepsilon_B, \quad \tau_2 = \tau_1 - 2l_0.$$

Входящие в (35)–(39) коэффициенты  $D_i$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} D_1 &= T_1 h^{-1} (p-1) - T_2 h^{-2} [g^2 + 1 - (p-1)^2] + \\ &\quad + T_3 h^{-3} [g^2 (1-3p) + p^2 (p-3)], \\ D_2 &= V_0 + T_1 h^{-1} (p+g^2) + T_2 h^{-2} [p^2 - g^2 (1-2p)] + \\ &\quad + T_3 h^{-3} [p^3 - g^2 (g^2 - 3p^2 + 3p)], \\ D_3 &= V_0 - D_1, \\ D_4 &= T_2 h^{-1} (p-1) - T_3 h^{-2} [g^2 - p(p-2)], \\ D_5 &= T_3 h^{-1} (p-1), \\ T_1 &= (p-1) [1 - Z_{AB}^{-1} - 6(Z_{AB}+1)^{-1}], \\ T_2 &= 3V_0 (p-1)^2 Z_{AB}^{-1}, \\ T_3 &= 2(p-1)^3 Z_{AB}^{-1} (Z_{AB}+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Формулы (33) и (34), описывающие зеркально отраженную от слоя волну и волну, проходящую слой один раз в обоих направлениях, справедливы при любых значениях наследственного параметра  $\varepsilon_B$  и при любых расстояниях от фронта. Необходимо только помнить, что за фронтом второй волны появляется фронт третьей волны, затем четвертой и т. д. волн, которые здесь не описаны. Положение каждого из фронтов волн определяется уравнением

$$\tau_n = \tau_1 - 2(n-1)l_0 = 0, \quad n=1, 2, 3, 4, \dots$$

и при известной толщине слоя может быть легко найдено.

4. Для анализа полученных формул представим (33) в виде

$$U_{A2(1)}(X, \tau_1) = -c_A A_0 H(\tau_1) [A_1 \exp(-p\tau_1) + V_* \sin(g\tau_1 - \psi_1)], \quad (40)$$

где

$$V_* = [(V_0 + A_1 p/g)^2 + A_1^2]^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = A_1 g / (V_0 g + A_1 p).$$

Очевидно, что отражение акустического импульса от вязкоупругого слоя происходит иначе, чем от упругого. Первый зеркально отраженный импульс имеет нестационарную часть, быстро убывающую с увеличением расстояния от фронта. Коэффициент отражения стационарной части не такой, как для упругого случая, и так же, как и приобретаемый сдвиг фазы, зависит от наследственных параметров и частоты синусоидального зондирующего импульса.



Форма второго импульса, отраженного назад задней стенкой вязкоупругого слоя, сложным образом зависит от наследственных параметров материала слоя — как и зеркально отраженный импульс, он имеет быстро затухающую нестационарную часть. Как показано в [6], стационарную часть второго импульса можно найти, заменяя в (34) верхний предел интегрирования на бесконечность и используя значения интегралов [7],

$$\int_0^{\infty} \sin(gy) e^{-\nu I_0(2\sqrt{\xi y})} dy = d \exp(\xi d) (g \cos \varphi + \sin \varphi),$$

$$\int_0^{\infty} \cos(gy) e^{-\nu I_0(2\sqrt{\xi y})} dy = d \exp(\xi d) (\cos \varphi - g \sin \varphi),$$

$$\varphi = \xi g d, \quad d = (1 + g^2)^{-1}.$$

Тогда из (34) при  $\tau_2 \rightarrow \infty$  получим

$$U_{A2(2)}(X, \tau_2) = - \frac{4c_A Z_{AB} A_0}{(Z_{AB} + 1)^2} \sqrt{(1 + g^2)(D_2^2 + g^2 D_3^2)} \exp\left(-\frac{\xi g^2}{1 + g^2}\right) \times$$

$$\times \sin\left(g\tau_2 - \frac{\xi g}{1 + g^2} - \psi_2\right), \quad (41)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{g(D_2 - D_3)}{D_2 + g^2 D_3}.$$

Анализ (41) показывает, что второй выходящий из вязкоупругого слоя импульс несет информации о слое значительно больше, чем зеркально отраженный. Амплитуда его стационарной части экспоненциально затухает с увеличением толщины слоя, от которой зависит и приобретаемый сдвиг фазы. Достаточно простые формулы (40) и (41), описывающие зеркально отраженный от слоя импульс и стационарную часть импульса, проходящего слой в обоих направлениях, позволяют, в принципе, определять наследственные параметры материала слоя так же, как это было сделано в [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
2. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
3. Thompson, W. T. J. Appl. Phys., **21**, № 2, 89—93 (1950).
4. Нигул У. К., Стулов А. С. Волны в слоистых линейных наследственных средах. Препринт. Таллин, АН ЭССР, 1985.
5. Nigul, U. The modified theory of viscoelasticity for description of the one-dimensional deformation waves. Preprint. Tallinn, Acad. Sci. ESSR, 1983.
6. Nigul, U. In: Nonlinear Deformation Waves, IUTAM Symposium (Tallinn, 1982). Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1983, 255—272.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
6/XII 1985



A. STULOV

**ÜHEMÕÖTMELISE AKUSTILISE IMPULSI LEVI JA PEEGELDUMINE  
DISKREETSelt KIHILISES LINEAARSES PÄRILIKUS KESKKONNAS**

Vaadeldakse ühemõõtmelise akustilise impulsi levi ja peegeldumist diskreetselt mitmekihilises pärilikus (viskoelastses) keskkonnas, mis koosneb kahest omavahel kihiga eraldatud poolruumist. On saadud lahendeid kõigi keskkonnas tekkivate lainete kirjeldamiseks. Keskkonna homogeensete osade pärilikud omadused on määratud suvaliste modifitseeritud roomavastuumadega. Erijuhul, kui vahekihiks on  $E$ -mäluaga pärilik keskkond ja poolruumideks ideaalselt kokkusurutav vedelik, on saadud valemid vahekihi mõlemalt eraldusjoonelt tagasipeegeldunud lainete kuju arvutamiseks. On kindlaks tehtud tagasipeegeldunud lainete kuju sõltuvus vahekihi pärilikke omadusi iseloomustavatest parameetritest.

A. STULOV

**THE ONE-DIMENSIONAL ACOUSTIC PULSE PROPAGATION IN LINEAR  
LAYERED HEREDITARY MEDIUM**

The propagation process of the one-dimensional acoustic pulse in two hereditary (viscoelastic) half-space separated by hereditary layer (plate) is considered. The solutions obtained (17)—(19) describe all types of the waves moving in the opposite directions in such a system with arbitrary modified kernel functions of each homogeneous medium. In the special case of the layer with  $E$ -memory surrounded by acoustic medium, the analytical formulae (34), (40), (41) describe the set of pulses coming back out of the layer. The influence of the hereditary parameters of the layer on the shape of the reflected waves is analysed.