EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 3

УДК 519.3 : 51 : 62-50

И. КЕЙС

СУБОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СПОСОБОМ АГРЕГАЦИИ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассматривается задача управления многомерной линейной системой с квадратичным функционалом оптимальности. Исследуется вопрос определения матриц усиления, агрегации и приближенных регуляторов, субоптимальных по показателям типа Клейнмана—Атанса и Ульма. С этой целью применяются три критерия субоптимальности:
1) близости приближенного регулятора к оптимальному по евклидовой норме невязки эффективной матрицы;
2) математического ожидания исходного критерия;
3) равномерно-фазового и фазового показателя субоптимальности.
Получены необходимые условия экстремальности матриц по этим критериям и предложен синтез линейных субоптимальных регуляторов, обобщающий результаты работ [1-7].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации многомерной ($n\gg 1$) линейной системы

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad \dim x=n\geqslant r=\dim u=r_B\overset{\triangle}{=}\operatorname{rank}B \tag{1.1}$$

по функционалу

$$2J=x_1'P_1x_1+\int_{t_0}^{t_1}(x'(t)Q(t)x(t)+u'(t)R(t)u(t))\,dt,$$

где x, u — векторы состояния и управления, $u(t)\in C[\mathcal{T}]$, $\mathcal{T}\overset{\triangle}{=}[t_0,t_1]$, матрицы $P_1=P(t_1)=\text{const}$, $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)\in C[\mathcal{T}]$ нужного порядка

$$Q=Q'\geqslant 0,\quad R=R'>0,\quad P_1=P_1'\geqslant 0 \tag{1.2}$$

и фиксированы t_0, t_1, $x_0\overset{\triangle}{=}x[t_0]=\text{const}$. При условиях (1.1), (1.2) по x существует линейный, единственный оптимальный $u=u^0(t,x)$ регулятор

$$u^0=K^0(t)x,\quad {}_rK^{0n}=-R^{-1}B'M,\quad M={}_nM^n(t),\quad B'\overset{\triangle}{=}B^{\mathrm{T}}, \tag{1.3}$$

где матрицант $M(t)$ — решение уравнения Риккати [8, 9]

$$\dot{M}=MBR^{-1}B'M-A'M-MA-Q,\quad M|_{t=t_1}\overset{\triangle}{=}M_1=P_1\geqslant 0. \tag{1.4}$$

Решение (1.4) существует, единственно, $M=M'$ на $\mathcal{T}$, положительно определенная на $\mathcal{T}\backslash t_1: M>0$. Минимум $2J$ по $u(t)$ равен $2J^0\ (t_0,x_0)=x_0'M(t_0)x_0$. Реализация решения (1.4) предъявляет большие требования к памяти ЭВМ, где надо сохранять значения ${}_nM^n(t_i)$ или ${}_rK^n(t_i)$.

Вычисление и измерение $x(t_i)$ должны быть много быстрее эволюции (1.1), а ошибка, пропорциональная объему счета, значительна при $n \gg 1$. Первое из ограничений вычислительного характера, казалось бы, устраняется интеграцией (1.4) справа налево с вычислением $M[t_0]$. Интеграцией (1.4) в прямом времени, находим в ходе процесса управления $M(t_i)$. Но из-за неустойчивости этого процесса вычисления мы лишены такой возможности [6].

Реально часто есть ограничение в информации об x, когда измеряется лишь сигнал $z = Cx$, где ${}_lC^n \in C[\mathfrak{T}]$ — матрица ранга $r_c = l$ $(l \ll n,\ l \leqslant n)$. (Дифференцирование z-компоненты x для наблюдения x по (1.1), (1.3) и C. d^kz/dt^k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ сопряжено с ростом погрешностей вычисления и техническими трудностями [9].) Учитывая эти условия, будем на основе линейной агрегации [4–7] осуществлять приближенный синтез $\bar{u}$, определенный одним из трех вариантов субоптимизации по критериям [1, 2, 4, 6, 7].

2. Минимизация квадратичной меры отклонения $\bar{u}$ от u^0

Учитывая линейность (1.1), (1.3) и сигнала z по x, будем искать приближенный регулятор $\bar{u}$ (и соответствующий I-субоптимальный $\bar{u}_0$) в классе $\bar{u} = \bar{K}Cx$, где $r_c = l$, $C[\mathfrak{T}] \in {}_r\bar{K}^l$, ${}_lC^n$ — матрицы усиления и агрегации соответственно. Идеально найти $C, \bar{K}$ из $\bar{K}C = K^0$, но так как $\operatorname{rank} K^0 = r$ и рассматривается сильная агрегация $r_c = l < r$, то уравнение не имеет решения. Поэтому для $\forall t \in \mathfrak{T}$ рассмотрим задачу минимизации по $C, \bar{K}$ квадрата нормы невязки.

$$I = \|\bar{K}C - K^0\|^2_{(2)} \ (\|A\|^2_{(2)} \overset{\triangle}{=} \operatorname{tr}(AA'),\ K^0 = -R^{-1}B'M) \tag{2.1}$$

Из $\delta I = 0$ аналогично [6] находим необходимые условия (2.1)-экстремальности $C_0, \bar{K}_0$ в виде двух матричных уравнений

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{grad}_{C_0} I = \bar{K}'_0(\bar{K}_0C_0 - K^0) = {}_l0^n, \quad \tfrac{1}{2}\operatorname{grad}_{\bar{K}'_0} I = C_0(C'_0\bar{K}'_0 - K^{0\prime}) = {}_l0^r. \tag{2.2}$$

Второе из них удовлетворяется лишь при

$$\bar{K}_0 = K^0C'_0(C_0C'_0)^{-1} \qquad (r_{c_0} = l \Leftrightarrow \Delta(C_0C'_0) > 0). \tag{2.3}$$

Из (2.2), (2.3) находим все экстремальные «эффективные» матрицы $\tilde{K}_0$

$$\tilde{K}_0 = \bar{K}_0C_0 = P[\Theta^{(1)\prime}]K^0, \quad P[\Theta^{(1)\prime}] \overset{\triangle}{=} P'P, \quad PP' = {}_l\mathbf{1}^l, \quad P = (l \times r), \tag{2.4}$$

где $(r \times r)$ — матрица проектирования $P[\Theta^{(1)\prime}]$ перестановочна с $(K^0K^{0\prime})$ ранга r, т. е. $P[\Theta^{(1)\prime}] = \Theta \ulcorner 0_\rho, \mathbf{1}_l \lrcorner$, $\Theta = [\Theta^{(1)} | \Theta^{(2)}]$, $\Theta^{(1)} = (r \times \varrho)$, $\Theta^{(2)} = (r \times l)$ — субматрицы ортогональной Θ из собственных векторов $(K^0, K^{0\prime})$, соответствующих ее собственным числам k_s^2 в порядке их роста, $1 \leqslant s \leqslant r$, $\varrho \overset{\triangle}{=} r - l$; $\ulcorner 0_\rho | \mathbf{1}_l \lrcorner$ — символ $\operatorname{diag}(0_1, 0_2, \ldots, 0_l, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \ldots, \mathbf{1}_l)$, $P'P$ — матрица проектирования в l-мерное L подпространство r-мерных столбцов $\Theta^{(2)}$, а $\Theta^{(1)\prime}\Theta^{(2)} = 0$. Если l максимальных чисел спектра $(K^0K^{0\prime})$ — различны, то плоскость L — единственная. Стационарное значение $\sum_1^\rho k_s^2 = I \searrow 0$ при $l \to r$. Из (2.2)—(2.4) на C_0 следует уравнение

$$C'_0(C_0C'_0)^{-1}C_0 = K^{0\prime}P'P(K^0K^{0\prime})^{-1}P'PK^0 + P(K^0)WP(K^0),$$

$$P(K^0) = {}_n\mathbf{1}^n - K^{0\prime}(K^0K^{0\prime})^{-1}K^0 \tag{2.5}$$

с произвольной симметричной $(n\times n)$-матрицей W. Решением (2.5) является $C_0 = V\omega_{(2)}$, $r(C_0) = l$, где ${}_lV^l$ — неособая произвольная такая, что $r_{C_0} = l$, а $\omega_{(2)}$ — субматрица $(l\times n)$ ортогональной $\omega = (r\times n)$, представляющей $K^0 = \Theta\ulcorner k_1, \dots, k_r \lrcorner\omega$, $\omega' \stackrel{\Delta}{=} [\omega'_{(1)} | \omega'_{(2)}]$. Субоптимальное $\bar{u} = \bar{K}_0 x$ по I дает проектирование: надо оптимальный вектор $K^0 x$ спроектировать на l-мерную $L \in E^r$. В интеграции (1.4) нужно на каждом шаге иметь матрицу $(P'P)$ перестановочную с $(K^0 K^{0'})$, но значения P, K_0, M не надо сохранять в памяти ЭВМ, так как они сразу используются при вычислении $\bar{u} = \bar{K}_0 x = \bar{K}_0 (C_0 x)$. В отличие от [6] здесь C не задана и $C = C[t] \neq \text{const}$, а условия (2.2) охватывают задачи $\min I$ по $\bar{K}(C = \text{fix})$ и $\min I$ по $C(K = \text{fix})$. В силу (2.3)—(2.5) экстремальная $\bar{K}_0$ ранга l.

3. Минимизация вероятностного критерия типа Клеймана-Атанса

Значение $2J(t, x)$ при (1.1) и $u = \bar{K}x$ будет квадрикой $2\bar{J} = x'L(t)x$, где матрица $L[t, t_1, L_1; \bar{K}]$ удовлетворяет линейному уравнению

$$-L^{\cdot} = L\bar{A} + \bar{A}'L + \bar{Q}, \quad L(t_1) = L_1 = P_1, \quad \bar{A} = A + B\bar{K},$$

$$\bar{Q} = Q + \bar{K}'R\bar{K}, \quad \bar{K} \stackrel{\Delta}{=} \bar{K}C, \tag{3.1}$$

имеющему на $\mathfrak{C}$ единственное, положительно определенное вне t_1 решение $L' = L > M$ (в силу единственности u^0) вида

$$L = \Phi'(t_1, t) P_1 \Phi(t_1, t) + \int_t^{t_1} \Phi'(\tau, t) \bar{Q}(\tau) \Phi(\tau, t)\, d\tau. \tag{3.2}$$

Фундаментальная $(n\times n)$-матрица $\Phi[t, \tau; \bar{A}]$ удовлетворяет равенствам

$$\Phi^{\cdot} = \bar{A}\Phi, \quad \Phi(\tau, \tau; \cdot) = {}_n1^n, \quad \Phi(t_1, t_3) = \Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_3),$$

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, 0)\Phi^{-1}(\tau, 0). \tag{3.3}$$

Положим $N_0 = L_0 - M_0$, $F_0 \stackrel{\Delta}{=} F | t = t_0$ и рассмотрим разность

$$2\Delta J^0 = 2[\bar{J}(t_0, x_0) - J^0(t_0, x_0)] = x_0' N_0 x_0, \quad N_0 > 0, \tag{3.4}$$

для которой в разделе 4 найдем равномерные и точечные по x_0 условия минимизации ΔJ^0 по C, $\bar{K} \in C[\mathfrak{C}]$. Не проводя здесь эту минимизацию, рассмотрим

$$\Delta_i = \mu_i^{-1}, \quad d_i = \lambda_i^{-1}, \quad G(M_0) = \{x_0 | x_0' M_0 x_0 \leqslant 1\}, \quad G(L_0) = \{\bar{x}_0 | \bar{x}_0' L_0 \bar{x}_0 \leqslant 1\}. \tag{3.5}$$

Длины их полуосей $\Delta_i = \mu_i^{-1}$, $d_i = \lambda_i^{-1}$, где μ_i, λ_i — корни из чисел спектров M_0, L_0 в порядке их роста, $d_n \leqslant \Delta_n$, $d_1 \leqslant \Delta_1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

В выборе критерия субоптимальности $\bar{u}$ играют роль три мотива:
1) этот критерий должен давать удовлетворительную оценку ΔJ^0,
2) ему отвечает эффективная процедура решения задачи или субоптимальное решение ее в аналитической форме,
3) критерий субоптимальности имеет геометрический смысл. Учитывая (3.1)—(3.5) и условия 1)—3), положим $\|N_0\| \stackrel{\Delta}{=} |\operatorname{tr} N_0|$ удовлетворяющей свойствам нормы N_0. На множестве $\bar{K}$, $C \in C[\mathfrak{C}]$ поставим задачу минимизировать $\|N_0\|$, эквивалентную двум задачам минимизации: близости $\bar{J}$ к J^0 в среднем на $\|x_0\| \leqslant 1$

$$2\|\Delta J^0\|_{(L_1)} = \int_{\|x_0\| \leqslant 1} |x_0' N_0 x_0|\, dx_0 = c(n) \operatorname{tr} N_0 \quad (c(n) = \text{const})$$

и математического ожидания, если $P(x_0)$ — непрерывная функция лишь r_0

$$r_0=(x'_0x_0)^{1/2} \text{ при } P\leqslant C^0 r_0^{-(3+\varepsilon)} \text{ вне } R^0=\mathrm{const}\ \ (r_0>R^0,\ 0<\varepsilon)$$

$$E[\Delta J^0]={}^1\!/_2 \int\limits_{\|x\|<\infty} (x'_0N_0x_0)P(r_0)\,dx_0=c(n;P)\operatorname{tr}N_0(c^0, c(n;P)=\mathrm{const},\ \varepsilon>0).$$

Смысл этих задач — минимизация по $\bar{K}, C$ разности сумм диаметров (3.5). Ввиду аддитивности tr это эквивалентно минимизации меры

$$I_1=\|L_0\|=\operatorname{tr}L[t_0, t_1, L_1; \bar{K}] \quad \text{на} \quad \bar{K}, C\in C[\mathfrak{T}],\ \bar{K}\stackrel{\Delta}{=}\bar{K}C, \tag{3.6}$$

не содержащей M_0. Остальные инварианты вращения $I_2, \ldots, I_n\stackrel{\Delta}{=}\det L_0$ для L_0 — возможные меры близости $G(L_0)$ к $G(M_0)$. При минимизации разности их объемов минимизируем $\det L_0\stackrel{\Delta}{=}\Delta(L_0)$ [7], но $I_j(L_0)$ — неаддитивные и не имеют всех свойств нормы $\bar{L}_0$, $2\leqslant j\leqslant n$. Рассмотрим задачу Майера с критерием (3.6) при связях (3.1) и $C, \bar{K}\in C[\mathfrak{T}]$, где надо найти экстремальные C^0, $\bar{K}^0$, решающие задачу $\operatorname{Arg\,min} I_1$ при $\forall t\in\mathfrak{T}$ и существовании их. Введем варьированные матрицы и обозначения

$$C_\varepsilon=C^0+\varepsilon V,\quad \bar{K}_\varepsilon=\bar{K}^0+\varepsilon U\ ({}_lV^n,\ {}_rU^l\in C[\mathfrak{T}],\ K_0\stackrel{\Delta}{=}-R^{-1}B'L),$$

$$\bar{K}_\varepsilon=\bar{K}^0+\varepsilon\bar{K}_1+0(\varepsilon)\bar{K}_2(\cdot,\varepsilon),\ \ \bar{K}^0\stackrel{\Delta}{=}\bar{K}^0C^0,\ \ \bar{K}_1\stackrel{\Delta}{=}\bar{K}^0V+UC^0,\ \ S'S\stackrel{\Delta}{=}R, \tag{3.7}$$

$$\Psi=\Psi'\stackrel{\Delta}{=}\Phi(t, t_1, \cdot)\Phi'(t, t_1, \cdot)>0,\quad H(\bar{K}^0)\stackrel{\Delta}{=}\Psi[B'L+R\bar{K}^0C^0]'=(n\times r).$$

Используя (3.1)—(3.3), (3.7), элементарные свойства tr, из первого приближения по ε получим вариацию $\delta I_1=(\partial I_1/\partial\varepsilon)\,|\,\varepsilon=0$ вида

$${}^1\!/_2\,\delta I_1=\int\limits_{t_0}^{t_1}\operatorname{tr}\,[H\bar{K}^0V+C^0HU]\,\mathrm{dt}.$$

Необходимые условия экстремальности $C^0, \bar{K}^0$ по (3.6) будут

$${}^1\!/_2\operatorname{grad}_{C^0}I_1=\bar{K}^{0\prime}H'={}_l0^n,\quad {}^1\!/_2\operatorname{grad}_{\bar{K}^0}I_1=H'C^{0\prime}={}_r0^l$$

с учетом (3.7) эквивалентны нелинейным по $C^0, \bar{K}^0$ уравнениям

$$(LB+C^{0\prime}\bar{K}^{0\prime}R)\bar{K}^0={}_n0^l,\qquad C^0\Psi(LB+C^{0\prime}\bar{K}^{0\prime}R)={}_l0^r. \tag{3.8}$$

Они сложнее, но по структуре аналогичны условиям экстремальности C_0, $\bar{K}_0$, $\bar{K}_0$ по I. Действительно, преобразованием $C^0=C_0\Phi$, $\bar{K}^0=S\bar{K}_0$ $K_0=SK^0\Phi$ система (3.8) сведется к (2.2). Используя результаты (2.3)—(2.5), находим определяющую экстремальный по I_1 субоптимальный регулятор $\bar{u}=\bar{K}^0x$ и эффективную матрицу

$$\bar{K}^0=\bar{K}^0C^0=S^{-1}(P'_0P_0)SK_0,\quad P_0P'_0={}_l1^l\quad (P'_0P_0\stackrel{\Delta}{=}{}_r\mathfrak{P}^r_0,\ r(\mathfrak{P}_0)=l), \tag{3.9}$$

где проектор $\mathfrak{P}_0$ необходимо перестановочен с $SK_0\Psi K_0'S'$ ранга r. Если Θ_0 — диагонализирующая матрица последней, то это условие эквивалентно

$$\mathfrak{P}_0=\Theta_0\ulcorner 0_\rho, 1_l\lrcorner\Theta'_0\ (\Theta_0\Theta'_0={}_r1^r,\ \rho\stackrel{\Delta}{=}r-l).$$

Из (3.9) аналогично разделу 2 следует, что для синтеза регулятора

$\bar{K}^0 x$ надо на каждом шаге совместно решать $2(n\times n)$-мерную линейную задачу (3.1)—(3.3) Коши и алгебраическую — поиска Θ_0 для $SK_0\Psi K'_0 S'$. Значения $\bar{K}^0$ не обязательно сохранять в памяти ЭВМ. Аналогично разделу 2 при переходе $l\to l+1$ показатель I_l не возрастает, т. к. ${}_r\bar{K}^{0l}$, ${}_lC^{0n}$ — соответственно субматрицы для ${}_r\bar{K}^{l+1}$, C^n_{l+1}. В рассматриваемых вариантах не используются обычные для задачи Майера множители Лагранжа, что упрощает синтез $\bar{u}$. В отличие от локальной схемы агрегирования, основанной на теории возмущений с малым параметром ε [10], предлагаемые варианты субоптимизации определяются условиями стационарности рассматриваемых функционалов. Точечно оптимальный регулятор (1.3) имеет матрицу $K=K^0=-R^{-1}B'M$, являющуюся единственной оптимальной в задаче $\min I_1$ по K, где L определена (3.1), $\bar{K}\to K\neq\bar{K}C$, $I_1\overset{\triangle}{=}\operatorname{tr}L_0$. Действительно, решая ее с учетом произвольности K_1 — вариации оптимальной K_* аналогично разделу 3 находим, что (3.8) вырождается в $H(K_*)={}_n0^r$, т. е. $K_*=-R^{-1}B'L$. Но тогда L удовлетворяет (1.4) и $L(t)\equiv M(t)$. Поэтому точечно оптимальный u^0 оптимален также по I_1, т. е. «в среднем». Из единственности u^0 следует $L_0[\cdot,K]>M_0[\cdot,K^0]$, $\operatorname{tr}L_0[\cdot,K]>\operatorname{tr}M_0[\cdot,K^0]$, т. е. I_1 имеет в $K^0\neq K$ строгий минимум. Так как соответствующие показателям J и I_1 экстремальные регуляторы u^0 и $u_*=K_*x$ совпадают, то функционалы J и I_1 являются конэкстремальными.

4. Вариант равномерно-фазовой и точечной субоптимизации

Найдем необходимые условия экстремальности пар C_*, $\bar{K}_*\in C[\mathfrak{T}]$ по функционалу $\bar{J}[K]$ для всех $x_0\in R^n$ (равномерно-фазовый случай) или для $\forall x_0\in R^n$ в случае точечной субоптимизации в предположении их существования. Используя (3.1)—(3.3), рассмотрим первую задачу. Введем обозначения

$$L_1=\delta L_*=(\partial L_\varepsilon/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}=\partial L[\bar{K}_*+\varepsilon(\cdot);\cdot]/\partial\varepsilon|\varepsilon=0, \tag{4.1}$$

где $L_{11}\overset{\triangle}{=}L_1|_{t=t_1}=0$, $-\dot{L}_1=L_1\bar{A}+\bar{A}'L_1+\bar{Q}_1$, $\tilde{K}_*\overset{\triangle}{=}\bar{K}_*C_*$, $\bar{A}\overset{\triangle}{=}A+B\tilde{K}_*$,

$$L_{10}\overset{\triangle}{=}L_1|_{t=t_0}=\int_{t_0}^{t_1}\Phi'(\tau,t_0)\bar{Q}_1(\tau)\Phi(\tau,t_0)\,d\tau,\quad \bar{Q}_1=\Omega_1[U;t]+\Omega_2[V;t],$$

$$\Omega_1\overset{\triangle}{=}D\bar{K}_*U+U'\bar{K}'_*D',\quad \Omega_2\overset{\triangle}{=}DVC_*+C'_*V'D',\quad D\overset{\triangle}{=}LB+\tilde{K}'_*R,$$

$${}_lU^n\overset{\triangle}{=}\delta C_*,\quad {}_rV^l=\delta\bar{K}_*\in C[\mathfrak{T}].$$

Из (4.1) и условия экстремальности $\bar{J}[\bar{K}]$ на $\bar{K}_*$ для всех x_0

$$2\delta\bar{J}=x'_0L_{10}x_0=0\sim L_{10}=-L'_{10}\Rightarrow L_{10}=0,\ \text{так как}\ L_{10}=L'_{10}$$

имеем при $\forall U$, $V\in C[\mathfrak{T}]$ условия стационарности C_*, $\bar{K}_*$ вида

$$\Omega_1=\Omega'_1=D\bar{K}_*U+U'\bar{K}'_*D'={}_r0^n\quad (D\overset{\triangle}{=}LB+C'_*\bar{K}'_*R), \tag{4.2}$$

$$\Omega_2=\Omega'_2=DVC_*+C'_*V'D'={}_n0^n. \tag{4.3}$$

Подставляя $U=\bar{K}_*'D'$ в (4.2), находим, что оно эквивалентно нелинейному матричному уравнению на C_*, $\bar{K}_*$ вида

$$D\bar{K}_*=[LB+(\bar{K}_*C_*)'R]\bar{K}_*={}_n0^l. \tag{4.4}$$

Подстановкой $V^0 = D'C'_*\,(C_*C'_*)^{-1}$ в (4.3) находим условие

$$C_*D \overset{\triangle}{=} C_*(LB + \bar{K}'_*\,R) = {}_l0^r \quad (\operatorname{rank} C = r_C = l). \tag{4.5}$$

Умножая (4.3) на C_*' справа, из (4.5) находим второе требование, определяющее вместе с (4.4) равномерно-фазовый случай

$$DV = (LB + C'_*\,\bar{K}'_*\,R)\,V = {}_n0^l. \tag{4.6}$$

В нем ранг матрицы $V \overset{\triangle}{=} \delta K_*$ возможных вариаций есть $d = r - r_D$. Легко показать, что V^0 входит в (4.6) лишь при условии (4.5), которое в общем случае не будет необходимым и достаточным для (4.3). Рассмотрим $\operatorname{rank} D$ в подслучае (4.4), (4.5), когда $V^0 \in \{V\}$. Заменой $C_* \to C_0$, $\bar{K}_* \to R^{-1/2}\bar{K}_0$, $LB \to MBR^{-1/2}$ сводим (4.4), (4.6) к (2.2). Используя результаты (2.3)—(2.5), получим

$$\bar{K}_* = \bar{K}_*C_* = -\tilde{\Psi}B'L, \quad D = LBR^{-1}[1^r_r - R^{1/2}(P'_*\,P_*)R^{-1/2}], \quad r_D = r - l,$$

где $R^{-1/2}B'L^2BR^{-1/2}$ необходимо перестановочна с P'_*P_*, $P_*P'_* = {}_l1^l$, $\tilde{\Psi} \overset{\triangle}{=} R^{-1/2}(P'_*\,P_*)R^{-1/2}$. При $\tilde{W} \overset{\triangle}{=} R^{-1/2}V$ уравнение (4.6) сводится к $[{}_r1^r - P'_*\,P_*]\tilde{W} = {}_r0^l$, а решение (4.6) при (4.5) будет $R^{1/2}P_*'w$, где $w = (l \times l)$ — произвольная, $w \in C[\mathfrak{T}]$. В общем случае (4.4), (4.6) обозначим

$${}_rY^l \overset{\triangle}{=} R^{1/2}\bar{K}_*, \quad {}_nN^r = LBR^{-1/2}, \quad M \overset{\triangle}{=} LB, \quad G = DR^{-1/2} \quad (r_N = r), \tag{4.7}$$

$$D\bar{K}_* = (N + C'_*\,Y')\,Y = GY = {}_n0^l, \quad r_G = r_D.$$

С учетом (4.7) можно доказать эквивалентность (4.4) уравнению на Y

$$(HH'N)\,Y = {}_n0^l, \quad HH' = {}_n1^n - C'_*\,(C_*C'_*)\,C_* = P_{C_*}, \quad H'H = 1^{n-l}_{n-l}, \tag{4.8}$$

где

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank}(HH'N) = \operatorname{rank}(P_{C_*}N) = \operatorname{rank} P_{C_*}M.$$

В общем случае (4.4), (4.6) из (4.7), (4.8) заключаем, что экстремальная пара C_*, $\bar{K}_*$ первой задачи связана (4.4) при линейном условии (4.6) на $\delta\bar{K}_* = V$, где $\operatorname{rank} D = \operatorname{rank}(P_{C_*}LB)$,

$$0 \leqslant r_V \overset{\triangle}{=} d = r - \operatorname{rank}(P_{C_*}LB) \geqslant r - \min\{r,\ n - l\}.$$

Рассмотрим задачу точечной субоптимизации, используя (4.1). Из $\delta\bar{J} = 0$ при $\forall U$, $V \in C[\mathfrak{T}]$ аналогично (4.2), (4.3), находим на C_*, $\bar{K}_*$ необходимые условия

$$y'(U'H' + HU)\,y = 0, \quad y \overset{\triangle}{=} \Phi(t, t_0|\bar{A})\,x_0, \quad H \overset{\triangle}{=} D\bar{K}_*, \quad U \overset{\triangle}{=} \delta C_*, \tag{4.9}$$

$$y'(C'V'D' + DVC)\,y = 0, \quad D \overset{\triangle}{=} LB + C'_*\,\bar{K}'_*\,R, \quad V = \delta\bar{K}_* \in C[\mathfrak{T}]. \tag{4.10}$$

Положим $U = H'$. Ввиду $y \neq 0$ из (4.9) будет $HH' = 0$, что возможно лишь при $H = 0$, т. е. (4.9) эквивалентно условию (4.4) первой задачи. Возьмем $V = d'c'$, $c \overset{\triangle}{=} Cy$, $d \overset{\triangle}{=} y'D$, при которых (4.10) есть $2(c'c)\,(d'd) =$

$=0$. Отсюда для выполнения (4.10) необходимо раздельное или совместное выполнение уравнений

$$Cf_0 = {}_l0^1 (f_0 = \Phi(t, t_0 | \bar{A}) \alpha_0, \ \|x_0\| \alpha_0 \stackrel{\Delta}{=} x_0, \ \|x_0\| Cf_0 \stackrel{\Delta}{=} c), \tag{4.11}$$

$$D' f_0 = {}_r0^1 \ (\|x_0\| f'_0 D \stackrel{\Delta}{=} d). \tag{4.12}$$

Поэтому экстремальная пара C_*, $\bar{K}_*$ второй задачи определяется либо системой (4.4), (4.11), либо (4.4), (4.12), или их пересечением — системой (4.4), (4.11), (4.12). Можно показать, что в первом подслучае решение (4.4), (4.11) имеет вид

$$C_* = UP[f'_0], \ K_* \stackrel{\Delta}{=} \bar{K}_* C_* = R^{-1}(W' - {}_r1^r) B' L, \ W\bar{K}_* = {}_r0^l, \tag{4.13}$$

где $C[\mathfrak{T}] \ni {}_lU^n$, ${}_rW^r$, $U(t)$, $W(t)$ — произвольные матрицы, $P_{[F]} = {}_n1^n - F'(FF')^{-1}F$.

Если возьмем $\forall \bar{K}_*(t)$ полного ранга, то $W = V_r P^r [\bar{K}_*']$, $\forall_r V^r \in C[\mathfrak{T}]$. Во втором подслучае (4.12) эквивалентно уравнению

$$D = P[f'_0] S \quad (\forall_n S^r(t) \in C[\mathfrak{T}]),$$

из которого находим эффективную матрицу

$$K_* \stackrel{\Delta}{=} \bar{K}_* C_* = R^{-1}(S' P[f'_0] - B' L). \tag{4.14}$$

Подстановкой (4.14) в (4.4) получим уравнение на $\bar{K}_*$ вида

$$P[f'_0] S \bar{K}_* = {}_n0^l \ (P[f'_0] = {}_n1^n - f_0 (f'_0 f_0)^{-1} f'_0). \tag{4.15}$$

Таким образом, во втором подслучае экстремальная пара C_*, $\bar{K}_*$ должна быть решением совместной системы (4.14), (4.15), содержащей произвольную непрерывную матрицу S порядка $(n \times r)$.

Автор благодарит О. Ваарманна, М. Кагановича, В. Ольмана и И. Петерсена за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aoki, M.* Joint Automat. Control. Conf. Preprint Papers. New York, 178—179 (1967).
2. *Kleinman, D. L., Athans, M.* IEEE Trans. Automat. Contr., **13**, 150—153 (1968).
3. *Ульм С.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **19**, № 2, 150—151 (1970).
4. *Ульм С.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **20**, № 1, 3—7 (1971).
5. *Aoki, M.* In: Optimization Methods for Large-Scale Systems, 5. Aggregation. New York, McGraw Hill Book Company, 1971, 191—232.
6. *Ульм С. Ю.* Автоматика и телемеханика, № 5, 27—32 (1972).
7. *Кейс И.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 33, № 2, 201—205 (1984).
8. *Athans, M., Falb, P.* Optimal Control. New York, 1968, 654—676.
9. *Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления. Киев, «Вища школа», 1975, 82—113, 192—194.
10. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М., «Наука», 1979, 154—244.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
2/VII 1985

I. KEIS

MITTESTATSIONAARSETE MITMEMÕÕTMELISTE SÜSTEEMIDE REGULAATORITE SUBOPTIMAALNE SÜNTEES LINEAARSEL AGREGEERIMISMEETODIL

On vaadeldud ruutoptimaalsusfunktsionaaliga mitmemõõtmelise mittestatsionaarse lineaarse süsteemi juhtimisülesannet. Kolme Kleinman-Athansi ja Ulmi tüüpi kriteeriumi alusel on uuritud agregeerimis- ja võimendusmaatriksi ning ligikaudsete suboptimaalsete lineaarsete regulaatorite määramise võimalust. On saadud vajalikud ekstreemumtingimused agregeerimis- ja võimendusmaatriksitele ja esitatud suboptimaalsed regulaatorid, mis vastavad kolmele uuritud variandile.

I. KEIS

ON SUBOPTIMAL CONTROL SYNTHESIS IN THE LARGE-SCALE LINEAR SYSTEM VIA AGGREGATION METHOD

The control problem of the large-scale linear dynamic system (1.1) governed by the quadratic performance criterion of quality (1.2), is considered in the paper.

The concept of aggregation is applied here in order to account for the possibility of the incomplete state feedback and/or the demand to develop computationally more efficient procedure in constructing partly optimal linear controls.

With this aim the problem of the gain and aggregation matrix optimal choice relevant for three suboptimality criteria (see (2.1), (3.6), (4.1)) is investigated.

As a result, necessary conditions adequate to the considered in sect. 2—4 variants, are obtained for extremal matrixes in (2.3)—(2.5); (3.8), (3.9); (4.4), (4.13)—(4.15). Hence, linear suboptimal controls associated with efficient matrixes (2.4), (3.9), (4.14) are derived to advance the investigations of M. Aoki, M. Athans and S. Ulm.