EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 3

УДК 519.6 : 517.589

А. МАРШАК

ОДНА ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЭКСПОНЕНТ КВАДРАТУРНЫМИ ФОРМУЛАМИ

(Представил Г. Кузмин)

Введение

При приближенном решении уравнения переноса часто требуется аппроксимировать интегральные экспоненты E_p, $p\geqslant 1$, квадратурными формулами (КФ) [1], и быстрота сходимости метода зависит от того насколько хорошо мы можем это делать.

В данной работе для широкого класса КФ выводится левосторонняя оценка приближения E_p. Эта оценка связывает степень аппроксимации E_p с первым узлом КФ и позволяет доказать неулучшаемость оценок скорости сходимости некоторых методов решения уравнения переноса (в частности, метода дискретных ординат [2]).

Рассмотрим последовательность КФ, аппроксимирующих интеграл

$$\int_0^1 f(\mu)\,d\mu \approx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mu_j),$$

$$\alpha_j\geqslant 0,\ j=1, 2, \ldots, n;\ 0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n\leqslant 1,\ n=1, 2, \ldots. \tag{1}$$

План работы следующий. В первом разделе выводится асимптотическое равенство для соотношения $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j/\mu_j^k$, $k=1, 2, \ldots,$ при помощи которого во втором разделе доказывается, что интегральную экспоненту E_p при помощи КФ (1), удовлетворяющей некоторым естественным требованиям, нельзя приблизить лучше, чем μ_1^{p-1}, где μ_1 — первый узел КФ. Третий раздел работы посвящен обсуждению этих требований.

Обозначим через c, c_k, $c_{k,l}$ положительные постоянные, которые могут принимать различные значения в различных соотношениях.

1. Веса и узлы КФ

Предположим, что КФ (1) удовлетворяет для любого n следующим требованиям

A) $\mu_l\leqslant \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\leqslant \mu_{l+1},\quad l=1, 2, \ldots, n,\ \mu_{n+1}=1,$

B) $\mu_{l+1}\leqslant c\mu_l,\quad l=1, 2, \ldots, n,$

C) $c_1<\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\mu_{j+1}}\right)<c_2.$

Обозначим $J=[1/\mu_1]$, $J^+=J+1$, $J^-=J-1$ и введем целочисленные множества

$$N_i^+=\left\{k>0:\ \mu_{k+1}\leqslant\frac{1}{i}\right\};\quad N_i=\left\{k>0:\ \mu_k\leqslant\frac{1}{i}\right\};$$

$$N_i^-=\left\{k>0:\ \mu_{k-1}\leqslant\frac{1}{i}\right\}$$

для $i=1, 2, \ldots, J^+$, положив $\mu_0=0$. Очевидно, что $N_{J^+}^+=N_{J^+}=\varnothing$, а $N_{J^+}^-=\{1\}$. Пусть далее

$$I_i^+=\sum_{j\in N_i^+}\alpha_j;\quad I_i=\sum_{j\in N_i}\alpha_j;\quad I_i^-=\sum_{j\in N_i^-}\alpha_j.$$

Нетрудно видеть, что $0\leqslant I_i^+\leqslant I_i\leqslant I_i^-$, $i=1, \ldots, J^+$ и

$$I_1^+=I_1=I_1^-=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, \tag{2}$$

$$I_{J^+}^+=I_{J^+}=0,\quad I_{J^+}^-=\alpha_1. \tag{3}$$

Из условий А) и В) следуют неравенства

$$I_i^+\leqslant\mu_{l+1}\leqslant\frac{1}{i},\quad l\in N_i^+,\quad l+1\notin N_i^+, \tag{4}$$

$$I_i\geqslant\mu_l>\frac{1}{i},\quad l\in N_i^-,\quad l+1\notin N_i^-, \tag{5}$$

$$I_i\geqslant\mu_l\geqslant c\mu_{l+1}>\frac{c}{i},\quad l\in N_i,\ l+1\notin N_i, \tag{6}$$

$$I_i\leqslant\mu_{l+1}\leqslant c\mu_l\leqslant\frac{c}{i},\quad l\in N_i,\quad l+1\notin N_i. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь как связаны I_i^+, I_i и I_i^-. Справедливы равенства

$$I_i^+=I_i-\alpha_{l(i)}, \tag{8}$$

где

$$\alpha_{l(i)}=\begin{cases}\alpha_l,\ l\in N_i,\ l\notin N_i^+,\\ 0,\ N_i=N_i^+,\end{cases}$$

и

$$I_i^-=I_i+\bar{\alpha}_{l(i)}, \tag{9}$$

где

$$\bar{\alpha}_{l(i)}=\begin{cases}\alpha_l,\ l\in N_i^-,\ l\notin N_i,\\ 0,\ N_i=N_i^-.\end{cases}$$

Таким образом, $\alpha_{l(i)}$ — это вес КФ, соответствующий узлу $\mu_{l(i)}$ такому, что $\mu_{l(i)}\leqslant\frac{1}{i}$, но $\mu_{l(i)+1}>\frac{1}{i}$ и соответственно $\bar{\alpha}_{l(i)}$ такой вес, что $\mu_{l(i)-1}\leqslant\frac{1}{i}$, $\mu_{l(i)}>\frac{1}{i}$. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{J}\alpha_{l(i)}=\sum_{j=1}^{n}m_j\alpha_j,$$

где

$$m_j=\left\{k'-k\geqslant 0\ :\ \frac{1}{k+1}<\mu_{j+1}\leqslant\frac{1}{k},\ \frac{1}{k'+1}<\mu_j\leqslant\frac{1}{k'}\right\},$$

т. е. m_j равно числу промежутков $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k+1}\right)$, на которое j-й узел КФ опережает $j+1$-й узел. Аналогично

$$\sum_{i=1}^{J}\overline{\alpha}_{l(i)}=\sum_{j=1}^{n}\overline{m}_j\alpha_j,$$

где $\overline{m}_j=m_{j-1}$, $j=2,\ldots,n$, $\overline{m}_1=0$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n}m_j=J^-,$$

а

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{m}_j=J^- - m_n.$$

Из неравенств

$$\frac{1}{k+1}<\mu_{j+1}\leqslant\frac{1}{k},\quad \frac{1}{k'+1}<\mu_j\leqslant\frac{1}{k'}$$

следует, что

$$\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\mu_{j+1}}-1\leqslant k'-k\leqslant\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\mu_{j+1}}+1,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\mu_{j+1}}\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_j\leqslant\sum_{i=1}^{J}\alpha_{l(i)}=\sum_{j=1}^{n}m_j\alpha_j\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\mu_{j+1}}\right)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j.$$

Теперь, учитывая условия A) и C), заключаем, что существуют такие постоянные c_1 и c_2, что справедливо неравенство

$$c_1<\sum_{i=1}^{J}\alpha_{l(i)}<c_2. \tag{10}$$

Аналогичное неравенство имеет место и для суммы $\overline{\alpha}_{l(i)}$.

Теперь сформулируем и докажем основной результат этого раздела.

Л е м м а. *Пусть КФ удовлетворяет условиям* A)—C). *Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j^k}=\begin{cases}c_n^1+|\ln\mu_1|, & k=1,\\ c_n^k\mu_1^{1-k}+O(\mu_1^{2-k}), & k>1,\end{cases} \tag{11}$$

причем $c_n^k\to c_0^k$, $n\to\infty$, $k=1,2,\ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отдельно случаи $k=1$ и $k>1$. При $k=1$ можно выписать следующую цепочку (мы используем технику, развитую в [3])

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j}=\sum_{i=1}^{J}\sum_{j\in N_i\setminus N_{i+1}}\alpha_j/\mu_j\leqslant\sum_{i=1}^{J}(i+1)\sum_{j\in N_i\setminus N_{i+1}}\alpha_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{J}(i+1)(I_i-I_{i+1})=\sum_{i=1}^{J}(i+1)I_i-\sum_{i=1}^{J}(i+1)I_{i+1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{J}(i+1)I_i-\sum_{i=2}^{J^+}iI_i=2I_1-J^+I_{J^+}+\sum_{i=2}^{J}I_i\overset{(2),\,(3)}{=}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j+\sum_{i=1}^{J}I_i\overset{A),\,8)}{\leqslant}1+\sum_{i=1}^{J}I_i^+ +\sum_{i=1}^{J}\alpha_{l(i)}\overset{(4),\,(10)}{\leqslant}$$
$$\leqslant 1+c+\sum_{i=1}^{J}\frac{1}{i}=c_J^1+\ln J,$$

где $c_J^1\to c_0^1$, $n\to\infty$. (Здесь и далее над знаками равенств и неравенств стоят номера используемых условий и соотношений).

Покажем обратное неравенство. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j/\mu_j=\sum_{i=1}^{J}\sum_{j\in N_i\setminus N_{i+1}}\alpha_j/\mu_j\geqslant\sum_{i=1}^{J}i\sum_{j\in N_i\setminus N_{i+1}}\alpha_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{J}i(I_i-I_{i+1})=\sum_{i=1}^{J}iI_i-\sum_{i=1}^{J}iI_{i+1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{J}iI_i-\sum_{i=1}^{J^+}(i-1)I_i=-JI_{J^+}+\sum_{i=1}^{J}I_i\overset{(3),\,(9)}{=}$$
$$=\sum_{i=1}^{J}I_i^- -\sum_{i=1}^{J}\bar{\alpha}_{l(i)}\overset{(5),\,(10)}{>}\sum_{i=1}^{J}1/i-c=\bar{c}_J^1+\ln J,$$

где $\bar{c}_J^1\to\bar{c}_0^1$, $n\to\infty$. Таким образом, при $k=1$ лемма доказана.

Пусть теперь $k>1$. Тогда учитывая неравенства

$$(i+1)^k-i^k\leqslant k(i+1)^{k-1}, \tag{12}$$
$$i^k-(i-1)^k\geqslant k(i-1)^{k-1}, \tag{13}$$

получим

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j/\mu_j^k=\sum_{i=1}^{J}\sum_{j\in N_i\setminus N_{i+1}}\alpha_j/\mu_j^k\geqslant\sum_{i=1}^{J}i^k(I_i-I_{i+1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{J}i^kI_i-\sum_{i=1}^{J^+}(i-1)I_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{J}[i^k-(i-1)^k]I_i+(J^+-1)^kI_{J^+}\overset{(3),\,(13)}{\geqslant}$$
$$\geqslant k\sum_{i=1}^{J}(i-1)^{k-1}I_i\overset{(6)}{>}kc\sum_{i=1}^{J}\frac{(i-1)^{k-1}}{i}\geqslant$$
$$\geqslant c_n^kJ^{k-1}+O(J^{k-2}).$$

Обратное неравенство показывается аналогично, применяя вместо (6) и (13) соответственно неравенства (7) и (12).

Принимая во внимание, что $J=[1/\mu_1]$, приходим к равенствам (11). Лемма доказана.

2. Аппроксимация интегральных экспонент при помощи КФ

Будем приближать интегральные экспоненты E_p, определяемые по формуле [1]

$$E_p(\tau)=\int\limits_1^\infty \frac{\exp(-\nu\tau)}{\nu^p}\,d\nu=\int\limits_0^1 \frac{\exp(-\tau/\mu)}{\mu^{2-p}}\,d\mu, \quad p=2,\,3,\,\ldots,\ \tau\geqslant 0, \tag{14}$$

последовательностью КФ (1), удовлетворяющих требованиям A)—C). Положим дополнительно, что КФ точны для многочленов степени $p-2$, т. е. имеет место условие

D) $$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^k=\frac{1}{k+1}, \quad k=0,\,1,\,\ldots,\,p-2.$$

Найдем асимптотическое разложение E_p. Применяя несколько раз равенство [4]

$$E'_p(\tau)=-E_{p-1}(\tau), \quad p=2,\,3,\,\ldots,$$

получим цепочку равенств

$$E_p(\tau)=E_p(0)-\int\limits_0^\tau E_{p-1}(\tau')\,d\tau'=E_p(0)-\tau E_{p-1}(0)+$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{\tau'} E_{p-2}(\tau'')\,d\tau''\,d\tau'=\ldots=$$

$$=E_p(0)-\tau E_{p-1}(0)+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{\tau^{p-3}}{(p-3)!}E_3(0)+$$

$$+(-1)^p\underbrace{\int\limits_0^\tau\ldots\int\limits_0^\tau}_{p-2} E_2(\tau)\,\underbrace{d\tau\ldots d\tau}_{p-2}. \tag{15}$$

Далее, используя известное разложение [5]

$$E_1(\tau)=\int\limits_0^1\frac{\exp(-\tau/\mu)}{\mu}\,d\mu=-\ln\tau-\gamma+\tau-\frac{\tau^2}{2\cdot 2!}+\frac{\tau^3}{3\cdot 3!}-\ldots \quad (\tau>0),$$

где γ — постоянная Эйлера, получаем для малых τ

$$E_2(\tau)=E_2(0)+\int\limits_0^\tau E'_1(\tau')\,d\tau'=1+\tau(\ln\tau-1+\gamma)+O(\tau^2).$$

Подставляя значение E_2 в (15), приходим к равенству

$$E_p(\tau)=\sum_{i=1}^{p-2}(-1)^{i-1}\frac{\tau^{i-1}}{(p-i)\,(i-1)!}+(-1)^p\frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!}+$$

$$+(-1)^p\underbrace{\int\limits_0^\tau\ldots\int\limits_0^\tau}_{p-2}\tau[\ln\tau+\gamma-1+O(\tau)]\,\underbrace{d\tau\ldots d\tau}_{p-2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}\tau^{i-1}}{(p-i)\,(i-1)!}+\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\tau^{p-1}\Big[\ln\tau-\sum_{i=1}^{p-1}1/i+\gamma\Big]+O(\tau^p). \tag{16}$$

Обозначим

$$E^n_p(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^{p-2}\exp(-\tau/\mu_j),\quad p=2,\,3,\,\ldots;\ \tau\geqslant 0. \tag{17}$$

Раскладывая экспоненту в ряд, получим

$$E^n_p(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^{p-2}\left(1-\frac{\tau}{\mu_j}+\ldots(-1)^p\frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!\,\mu_j^{p-2}}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^{p-2}\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\tau^{p-1}\left(\frac{1}{\mu_j^{p-1}}-\frac{\tau}{p\mu_j^{p}}+\frac{\tau^2}{p(p+1)\mu_j^{p+1}}-\ldots\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^i}{(i-1)!}\tau^{i-1}A^i_n-\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\tau^{p-1}A^p_n(\tau),$$

где

$$A^i_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^{p-i-1},\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,p-1,$$

$$A^p_n(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j}-\frac{\tau}{p}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j^2}-\frac{\tau}{p+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j^3}+\frac{\tau^2}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j^4}-\ldots\right\}.$$

В последнем равенстве обозначим $s=\tau/\mu_1$. Тогда, учитывая результат леммы, имеем

$$A^p_n(\tau)=c^1_n+|\ln\mu_1|-\frac{s}{p}\left\{c^2_n+O(1)-\frac{s}{p+1}\left[c^3_n+O(1)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{s^2}{(p+1)(p+2)}\left[c^4_n+O(1)\right]-\ldots\right\}=$$

$$=-\ln\mu_1+\left\{c^1_n-\frac{c^2_n+O(1)}{p}s+\frac{c^3_n+O(1)}{p(p+1)}s^2-\right.$$

$$\left.-\frac{c^4_n+O(1)}{p(p+1)(p+2)}s^3+\ldots\right\}=-\ln\mu_1+d^p_n(s), \tag{18}$$

причем

$$d^p_n(s)\to d^p_0(s)\equiv c^1_0-\frac{c^2_0+O(1)}{p}s+\frac{c^3_0+O(1)}{p(p+1)}s^2-\frac{c^4_0+O(1)}{p(p+1)(p+2)}s^3+\ldots$$

при $n\to\infty$.

Сопоставим теперь асимптотические разложения E_p и $E_p{}^n$, определенные в (16) и (18) соответственно. Имеем

$$E_p(s\mu_1)-E^n_p(s\mu_1)=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}(s\mu_1)^{i-1}\left[\frac{1}{p-i}-A^i_n\right]+$$

$$+\frac{(-1)^p}{(p-1)!}(s\mu_1)^{p-1}\left[\ln s+\ln\mu_1-\sum_{i=1}^{p-1}1/i+\gamma-\ln\mu_1+\right.$$

$$\left.d^p_n(s)\right]+O\left[(s\mu_1)^p\right].$$

Принимая во внимание условие D), получим, что $A_n{}^i=1/(p-i)$ и

$$\bar{E}_p(s\mu_1)-E_p^n(s\mu_1)=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}(s\mu_1)^{p-1}[\ln s+\bar{d}_n^p(s)]+O[(s\mu_1)^p],$$

где

$$\bar{d}_n^p(s)=d_n^p(s)+\gamma-\sum_{i=1}^{p-1}1/i\to d_0^p(s)+\gamma-\sum_{i=1}^{p-1}1/i,\quad n\to\infty.$$

Теперь зафиксируем $s\in(0,1]$ так, чтобы $\ln s+\bar{d}_n{}^p(s)\neq 0$. На возможность этого указывает тот факт, что функция $\ln s+\bar{d}_0{}^p(s)$ суть аналитическая неравная тождественно нулю. Значит существует $a_p=$ $=\mathrm{const}>0$ такая, что

$$|E_p(s\mu_1)-E_p^n(s\mu_1)|\geqslant a_p\mu_1^{p-1},\quad n\geqslant n_0.$$

Итак, справедлива

Теорема. *Пусть КФ удовлетворяет условиям* A)—D). *Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant\infty}|E_p(\tau)-E_p^n(\tau)|\geqslant a_p\mu_1^{p-1},\quad n\geqslant n_0,\quad a_p=\mathrm{const}>0,$$

где μ_1 *— первый узел КФ, а функции* E_p *и* $E_p{}^n$ *определяются соответственно равенствами* (14) *и* (17).

Замечание. Проводя аналогичным образом аппроксимацию функции $\tau^l E_p(\tau)$, $l\geqslant 0$, можно показать, что имеет место оценка

$$\max_{\tau\geqslant 0}|\tau^l(E_p(\tau)-E_p^n(\tau)|\geqslant a_p^l\mu_1^{p+l-1},\quad n\geqslant n_0',\quad l\geqslant 0,\quad a_p^l=\mathrm{const}>0.$$

3. Обсуждение КФ

В этом разделе на примере некоторых КФ рассмотрим выполнение условий A)—D).

Прежде, чем проверить выполнение условий B) и C), отметим, что эти условия не связаны между собой, а именно:

Утверждение 1. *Существуют КФ, удовлетворяющие* A) *и* B), *но неудовлетворяющие* C).

Утверждение 2. *Существуют КФ, удовлетворяющие* A) *и* C), *но неудовлетворяющие* B).

В качестве доказательства приведем примеры таких формул. КФ, узлы и веса которой есть

$$\mu_j=a^{j-1}\mu_1,\quad \alpha_j=a^{j-1/2}\mu_1,\quad j=1,2,\ldots,n,\quad a\geqslant 2,$$

удовлетворяет A) и B). Действительно,

$$\mu_l=a^{l-1}\mu_1\leqslant\sum_{j=1}^{l}\alpha_j=\mu_1\frac{\sqrt{a}}{a-1}(a^l-1)\leqslant a^l\mu_1=\mu_{l+1}$$

и

$$\mu_{l+1}\leqslant a\mu_l,\quad l=1,2,\ldots,n.$$

Однако

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\,\Delta\,\mu_j}{\mu_j\mu_{j+1}}=(1-1/a)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j/\mu_j=\sqrt{a}(1-1/a)n\to\infty$$

при $n\to\infty$. (Здесь и далее $\Delta\mu_j=\mu_{j+1}-\mu_j$, $j=1,\ldots,n$).

С другой стороны, КФ

$$\mu_1=1/n^2,\quad \alpha_1=1{,}5/n^2,\quad \mu_j=(j-1)/n,\quad \alpha_j=1/n,\quad j=2,3,\ldots,n$$

не удовлетворяет условию B), ибо $\mu_2/\mu_1=n$. Но

$$\mu_l=\frac{l-1}{n}<\sum_{j=1}^{l}\alpha_j=\frac{1,5}{n^2}+\frac{l-1}{n}<\frac{l}{n}=\mu_{l+1}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\Delta\mu_i}{\mu_j\mu_{j+1}}=1,5(1-1/n)+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j(j-1)}<c.$$

Утверждения 1 и 2 доказаны.

1) КФ средних прямоугольников:

$$\alpha_j=1/n,\quad \mu_j=(j-1/2)/n,\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Выполнение A) и B) очевидно. Далее из равенства

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\mu_j^{-1}-\mu_{j+1}^{-1})=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(j-1/2)(j+1/2)}$$

следует C). Условие D) выполнимо для $p\leqslant 3$.

2) КФ Гаусса, отображенные на [0, 1]. Выполнение A) немедленно следует из теоремы Чебышева—Маркова—Стильтьеса [6]. Условие B) проверено в [5], а D) имеет место при $p\leqslant 2n+1$. Для проверки C) заметим, что веса КФ Гаусса можно представить в виде

$$\alpha_j=(\pi/2n)\sin\theta_j+O(1/n^2),\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n, \tag{19}$$

где [5]

$$\theta_j=\frac{j-1/4}{n+1/2}\pi+(8n^2)^{-1}\operatorname{ctg}\frac{j-1/4}{n+1/2}\pi+O(n^{-3}). \tag{20}$$

Представление (19) можно получить, применяя к выражению для весов КФ Гаусса асимптотическую формулу Дарбу для производных от многочленов Лежандра [6]. Теперь нетрудно доказать C). Из (19)—(20) следует, что

$$\alpha_j\Delta\mu_j\leqslant\frac{c}{n^2}\sqrt{\mu_j}\,[\sqrt{\mu_j}+1/n],\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n$$

и отсюда

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\mu_j^{-1}-\mu_{j+1}^{-1})\leqslant(c/n)\sum_{j=1}^{n}1/\mu_j\leqslant c_1.$$

Обратное неравенство получается без труда.

3) КФ Кленшоу—Куртиса, отображенные на [0, 1]. Известно, [7], что узлы и веса этих КФ имеют вид

$$\mu_j=\sin^2(\pi j/2n),\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n,\quad n \text{ — четное}.$$

$$\alpha_j=(2/n)\sum_{i=0}^{n/2}{}''(1-4i^2)^{-1}\cos(2\pi ij/n),\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n-1,$$

$$\alpha_n=0,5/(n^2-1).$$

(Здесь Σ'' означает, что первый и последний член взяты с коэффициентом 0,5).

В [8] доказано, что

$$\alpha_j=(\pi/2n)\sin(\pi j/n)+O(n^{-4}\sin^{-2}(\pi j/n)),\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n-1,$$

откуда следует выполнение A) и C). Выполнение B) очевидно, а D) справедливо для $p \leqslant n+2$, что следует из построения КФ Кленшоу—Куртиса.

4) Составная КФ. Разделим отрезок [0, 1] на $m+1$ отрезков точками

$$0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_{m+1} = 1.$$

Применяя на каждом отрезке $[a_j, a_{j+1}]$, $j=0, 1, \ldots, m$ КФ с узлами $\xi_i \in (0, 1]$ и весами $\omega_i > 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, получим узлы μ_k и веса α_k, $k=1, 2, \ldots, (m+1)n$ новой КФ, а именно [3]:

$$\begin{cases} \mu_{jn+i} = a_j + \xi_i \Delta a_j, & \Delta a_j = a_{j+1} - a_j, \\ \alpha_{jn+i} = \omega_i \Delta a_j, & j=0, 1, \ldots, m, \quad i=1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{21}$$

Предположив, что ξ_i, ω_i, $i=1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют требованиям A)—D), можно показать, что и КФ с узлами и весами (21) удовлетворяет этим условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М., «Мир», 1972.
2. *Вайникко Г. М., Маршак А. Л.* Изв. ВУЗов. Математика, № 11, 11—22 (1978).
3. *Pitkäranta, J., Scott, L. R.* SIAM J. Numer. Anal., **20**, 922 (1983).
4. *Смелов В. В.* Лекции по теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1978.
5. *Абрамович М. И., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М., «Наука», 1979.
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
7. *Imhof, I. P.* Numer. Math, № 5, 138—141 (1963).
8. *Маршак А. Л.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **35**, № 3, 338—340 (1986).

Институт астрофизики и физики атмосферы Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/XI 1985
Переработанный вариант
21/II 1986

A. MARSAK

ÜKS INTEGRAALSETE EKSPONENTIDE KVADRATUURVALEMITEGA LÄHENDAMISE VEAHINNANG

Käesolevas töös on tuletatud vasakpoolne integraalsete eksponentide kvadratuurvalemitega lähendamise veahinnang. Tõestatakse, et integraalset eksponenti E_p ei saa lähendada ühtlases meetrikas paremini kui const μ_1^{p-1}, kus μ_1 on esimene sõlm kvadratuurvalemis, mis rahuldab tingimusi A) — D). On kontrollitud nende tingimuste täidetust mõningate (tavaliselt kasutatavate) kvadratuurvalemite jaoks.

A. MARSHAK

AN ESTIMATE OF THE APPROXIMATION ACCURACY OF THE INTEGRAL EXPONENTS BY QUADRATURE RULES

In the present paper the left-hand estimate of the approximation accuracy of the integral exponents E_p, $p>1$ by quadrature rules is deduced for a wide class of quadrature rules. This estimate connects the accuracy of the approximation of E_p with the first point of quadrature rule and permits to prove the nonimprovement of the estimates of the convergence rate of some methods for solving the transport equation (for example, the discrete ordinates method).

The plan of this paper is as follows: in section 1 the asymptotic equality for $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j/\mu_j^k$, $k=1, 2, \ldots$; $n=1, 2, \ldots$ is derived. Here $\alpha_j = \alpha_j^{(n)} \geqslant 0$, $\mu_j = \mu_j^{(n)} \in [0,1]$, $j=1, \ldots, n$ are quadrature weights and points. In section 2 it is proved that one cannot approximate the integral exponents E_p, $p>1$ by the quadrature rule better than μ_1^{p-1}, where μ_1 is the first point of quadrature rule that satisfies some of natural conditions. These conditions are discussed in the third section.