EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 3

УДК 512.4

О. ПОЛЕВИЦКАЯ

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВТОРОГО ПРЕПЯТСТВИЯ В ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЯДРОМ ПОРЯДКА p^n

(Представил А. Хумал)

Работа является продолжением [1]. В ней сделаны некоторые уточняющие замечания к [1]. Приведен пример вычисления второго препятствия. Затем сформулированы следствия для случая полей алгебраических чисел.

1. Замечания к [1]

Сохраняя все обозначения [1], рассматриваем задачу погружения поля k с группой Галуа F над k_0, связанную с точной последовательностью

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F = \Gamma(k/k_0) \longrightarrow 1, \qquad (1)$$

здесь G — произвольная p-группа.

Замечание 1. Отметим, что в отличие от случая абелева ядра, в котором разрешимость задачи погружения с произвольным ядром N сводится к разрешимости задачи с ядром порядка p^n (теоремы Кохендорфера), в случае неабелева ядра этот вопрос остается открытым. Однако выполнение условия согласности для задачи с ядром порядка p^n следует из его выполнения для сопутствующей силовской задачи (см. [2]). Поэтому и вычисление второго препятствия в задаче с произвольной группой G при ядре N порядка p^n сводится к вычислению второго препятствия в задаче с p-группой G, которую мы и рассматриваем.

Замечание 2. Необходимо также заметить, что элемент v, построенный в [1], попадает в центр Z_B алгебры B только при определенном выборе элемента q. В самом деле, для того, чтобы $v \in Z_B$, необходимо и достаточно, чтобы v коммутировало с θ и со всеми $g \in G$. То, что v всегда коммутирует с θ, проверяется непосредственно, а коммутативности v со всеми $g \in G$ можно добиться, подбирая для $q \in kN$ правый множитель из $D_A \cap kN$.

Действительно, найдем такое $\nu \in D_A \cap kN$, что $(\theta q \nu)^\sigma = \theta q \nu$ для всех $\sigma \in G$, или иначе $\nu^\sigma = ((\theta q)^\sigma)^{-1}\theta q \nu$. Обозначим $((\theta q)^{-1})^\sigma \theta q = \mu_\sigma$. Имеем, $\mu_\sigma \in B$ и $\mu_{\sigma_1}^{\sigma_2}\mu_{\sigma_2} = \mu_{\sigma_1\sigma_2}$, так как $(u^{-\sigma_1}u)^{\sigma_2}u^{-\sigma_2}u = u^{-\sigma_1\sigma_2}u$. Следовательно, по теореме Шпайзера существует $\nu = \sum\limits_{\sigma\in G} \mu_\sigma^{-1}$ такое, что $\nu^\sigma = \mu_\sigma \nu$.

Покажем, что $\nu \in D_A \cap kN$. Так как ν выражается через $u = \theta q$ и $u^{\sigma l_\sigma} = u$, то и $\nu^{\sigma l_\sigma} = \nu$. Кроме того, $\mu_\sigma = u^{-\sigma}u = q^{-\sigma}\theta^{-\sigma}\theta q = q^{-\sigma}\lambda_\sigma^{-1} q \in$ $\in kN \subset A$.

Итак, $\theta q \nu$ коммутирует со всеми $g \in G$, а тем более и $v = (\theta q \nu)^p$.

Замечание 3. Вообще говоря, $D_B \supset D_A(u)$ и $D_B \hat{e}_\chi = D_A(u)\hat{e}_\chi$, только если $ue_\chi \neq 0$. Если N — абелева группа, то пункт 2 из [1], основанный на строении алгебр Z_A и Z_B, остается в основном без изменений. Только нужно добавить одно дополнительное предположение: $ue_\chi \neq 0$ для любого $e_\chi \in Z_{kN}$. В случае же неабелева ядра N необходимо внести уточнения.

Во-первых, при неабелевом ядре N необходимо предположить, что k — поле разложения для группы N. При таком предположении центральные идемпотенты e_χ алгебры kN образуют k-базис центра Z_{kN} алгебры kN (см. [3], с. 223, 226).

При абелевой группе N центральные идемпотенты алгебры

$$kN,\ e_\chi = (1/[N:1]) \sum_{n\in N} n\chi(n^{-1}),\ \chi \in \mathrm{Hom}(N, k^*),$$

образуют k-базис $kN = Z_{kN}$ всегда. И, как видно, $e_\chi^{\varphi^k} = e_{\chi\chi_1^k} \neq e_\chi$.

Поэтому все компоненты $Z_A\ (u)$ имеют вид $\hat{k}_\chi[a_{\hat{\chi}}, v_{\hat{\chi}}]$ и форма второго препятствия в [1] выписана верно.

При неабелевом же ядре N в строении алгебр Z_A и $Z_A \cap Z_B$ возникают особенности, которые влияют на окончательную форму второго препятствия. Действительно, в этом случае не все центральные идемпотенты e_χ алгебры kN будут изменяться под воздействием θ и $u = \theta q$ (см. раздел 2. Пример). Поэтому для центральных идемпотентов e_χ возможны две разновидности простых компонент алгебры Z_A

I $Z_A e_\chi \approx \hat{k}_\chi(\sqrt[p]{a_{\hat{\chi}}}),\ a_{\hat{\chi}} \neq 0$ (как и в случае абелева ядра),

II $Z_A e_\chi \approx k_\chi = \hat{k}_\chi$.

Как показано выше, для абелева ядра N разновидности II не возникает.

Утверждение. *Пусть N — неабелева группа порядка p^n и пусть $D_A\hat{e}_\chi$ не является матричной алгеброй порядка p и $u\hat{e}_\chi \neq 0$ для e_χ вида* I. *($\hat{e}_\chi = \sum_{k=0}^{p-1} e_\chi^{\theta^k}$ для e_χ вида* I *и $\hat{e}_\chi = e_\chi$ для e_χ вида* II.) *Тогда для того, чтобы $B\hat{e}_\chi$ было матричной алгеброй порядка fp над некоторой своей подалгеброй, необходимо и достаточно, чтобы в случае* I *$Z_A(u)\hat{e}_\chi \approx \hat{k}_\chi[a_{\hat{\chi}}, v_{\hat{\chi}}]$ было матричной алгеброй порядка p, а в случае* II *поле $k_0(\theta)$ было полем разложения для алгебры $D_A e_\chi$.*

Лемма. *Если e_χ вида* I, *т. е. $e_\chi^u \neq e_\chi$, то $C_{D_A(u)}(Z_A(u)\hat{e}_\chi) \subset D_A\hat{e}_\chi$.*

Действительно, $D_A(u) = \{d_0 + d_1 u + \ldots + d_{p-1}u^{p-1}\}_{d_i \in D_A}$, причем d_i коммутируют со всеми $z \in Z_A$, в том числе с e_χ.

$$e_\chi^{d_0+\ldots+d_{p-1}u^{p-1}} = \prod_k e_\chi^{u^k} = \begin{cases} e_\chi^{u^k}, & \text{если лишь один из } d_i \neq 0 \\ 0, & \text{если хотя бы два из } d_i \neq 0. \end{cases}$$

Так как $e_\chi^{u^k} \neq e_\chi$ при $k \neq 0$, то $C_{D_A(u)}(Z_A(u)\hat{e}_\chi) \subset D_A\hat{e}_\chi$. Лемма доказана.

Рассмотрим возможность I.

То, что распадение $Z_A(u)\hat{e}_\chi$ влечет распадение $D_A(u)\hat{e}_\chi$, очевидно (см. [4], теорема 4.4.2). Покажем обратное. Пусть $D_A(u)\hat{e}_\chi = (K)_p$, где K — некоторое тело. Как показано в [1], $Z_A(u)\hat{e}_\chi \approx \hat{k}_\chi[a_{\hat{\chi}}, v_{\hat{\chi}}]$ — простая центральная алгебра над полем $\hat{k}_\chi$. Применяя теорему 4.4.2 из [4], имеем $D_A(u)\hat{e}_\chi = Z_A(u)\hat{e}_\chi \otimes_{\hat{k}_\chi} C_{D_A(u)}(Z_A(u)\hat{e}_\chi)$. По лемме $C_{D_A(u)}(Z_A(u)\hat{e}_\chi) \subset D_A\hat{e}_\chi$. По предположению $D_A\hat{e}_\chi$ — тело. Значит, $Z_A(u)\hat{e}_\chi$ — матричная алгебра порядка p.

Приведенные в [1] рассуждения относительно того, что $D_A(u)\hat{e}_\chi$ и

$Z_A(u)\hat{e}_\chi$ — матричные алгебры порядка p одновременно, неполны.

Обратимся теперь к возможности II.

По теореме (33.8) из [4] минимальный центральный идемпотент алгебры kN $e_{\chi_j}=(x_j/[N:1])\sum_{a\in N} a\chi_j(a^{-1})$, где χ_j — неприводимый характер группы N, $x_j=(X_j:k)$, а X_j — минимальный левый идеал простой компоненты $(kN)_j$ алгебры kN. В рассматриваемом случае $e^{\theta}_{\chi_j}=e_{\chi_j}$, поэтому e_{χ_j} является также центральным идемпотентом алгебры k_1N_1 и $\chi_j|_{N\setminus N_1}=0$. Согласно [3], с. 262, упр. 7 $\chi_j|_{N_1}=\psi_1+\ldots+\psi_p$, где ψ_s $(s=1,\ldots,p)$ — различные неприводимые характеры группы N_1, имеющие одинаковую степень. Идемпотент e_{χ_j} разложится в сумму p минимальных центральных идемпотентов алгебры k_1N_1, соответствующих характерам $\psi_s : e_{\chi_j}=\sum_{s=1}^{p} \mathrm{E}_s$, E_s — минимальные идемпотенты $Z_{k_1N_1}$.

Согласно [5], с. 112, имеем, $Ae_{\chi_j}=(T)_p$, $Be_{\chi_j}=(T_1)_p$, где T и T_1 — нормализаторы для E_s в Ae_{χ_j} и Be_{χ_j}. E_s — центральный элемент в k_1N_1, но не центральный элемент в kN, поэтому, если $\{\beta \bmod N_1\}=N/N_1$, $\beta\in N$, то $\beta\notin T$. Значит, θ коммутирует с T и $T_1=T\otimes k_0(\theta)$.

С другой стороны, как показано в [1], $Ae_{\chi_j}\approx(D_Ae_\chi)_f$. Элементы E_s — идемпотенты в алгебре Ae_{χ_j} и поэтому, приведенные к диагональному виду, они будут изображаться матрицами, имеющими по диагонали f/p единиц и остальные нули. Значит, $T\approx D_Ae_{\chi_j}$.

Итак, $Be_{\chi_j}\approx(D_Ae_{\chi_j}\otimes k_0(\theta))_f$ и следовательно, для того, чтобы Be_{χ_j} было матричной алгеброй порядка fp, необходимо и достаточно чтобы $k_0(\theta)$ было полем разложения для алгебры $D_Ae_{\chi_j}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть при всех предположениях* [1] k *— поле разложения для неабелевой группы* N, D_A *не является матричной алгеброй порядка* p *и пусть* $ue_\chi\neq 0$ *для* e_χ *вида* I. *Тогда для исчезновения второго препятствия задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $B\hat{e}_\chi$ *было матричной алгеброй порядка* fp *для каждого* $\hat{e}_\chi$. *Это в свою очередь равносильно для* e_χ *вида* I *тому, что* $\hat{k}_\chi[a_{\hat{\chi}}, v_{\hat{\chi}}]$ *— матричная алгебра порядка* p, *а для* e_χ *вида* II *тому, что* $k_0(\theta)$ *— поле разложения для* D_Ae_χ.

2. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу с ядром $N=\{\alpha,\beta\}$, $\alpha^4=\beta^2=1$, $\alpha^\beta=\alpha^3$; $G=\{\gamma,\alpha,\beta\}$, $\gamma^2=\alpha^2$, $\alpha^\gamma=\alpha^3$, $\beta^\gamma=\beta\alpha$; $F=\Gamma(k_0(\sqrt{-1})/k_0)=\{s\}$, $s=\varphi(\gamma)$.

Непосредственная проверка показывает, что набор минимальных центральных идемпотентов алгебры kN есть

$$e_1=\frac{1+\alpha^2}{2}\,\frac{1+\alpha}{2}\,\frac{1+\beta}{2},\quad e_2=\frac{1+\alpha^2}{2}\,\frac{1+\alpha}{2}\,\frac{1-\beta}{2},$$

$$e_3=\frac{1+\alpha^2}{2}\,\frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1+\beta}{2},\quad e_4=\frac{1+\alpha^2}{2}\,\frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1-\beta}{2},$$

$e_5 = \frac{1-\alpha^2}{2}$. Как видим, идемпотенты e_1, e_2, e_3, e_4 вида I, а e_5 вида II.

Пусть $G_i = \{g \in G \,|\, e_i^g = e_i\}$ и $k_{e_i} = k^{G_i}$, $\hat{G}_i = \{g \in G \,|\, e_i^g = e_i^{u^k},\ k=0, 1\}$, $\hat{k}_{e_i} = k^{\hat{G}_i}$, $i=1, \ldots, 4$. Тогда $G_{1,2} = \hat{G}_{1,2,3,4} = G$, $G_{3,4} = N$; $k_{e_{1,2}} = \hat{k}_{e_{1,2}} = k_0$, $k_{e_{3,4}} = k_0(\sqrt{-1})$, $\hat{k}_{e_{3,4}} = k_0$.

В рассматриваемом примере $v = q^{1+\psi}\mu = \left(\sum_{a \in N} (1+m_{\gamma a}^{-1})\right)^{1+\psi}\mu = 8(1+m_\gamma^{-1})^{1+\psi}\mu$. Как нетрудно проверить, $l_\gamma = \frac{1+\alpha^2}{2} + \beta\frac{1-\alpha}{2}\frac{1-\alpha^2}{2}$ удовлетворяет условию согласности. Вычисления показывают, что $m_\gamma = l_\gamma^{-1} l_\gamma^{\psi}\lambda_\gamma = \alpha^2$. Итак, $v = 16\mu\frac{1+\alpha^2}{2}$. Значит, $\hat{v}_{1,2} = \hat{v}_{3,4} = 16\mu$, $\hat{v}_5 = 0$. Таким образом, идемпотенты вида I дают условие исчезновения второго препятствия: $\theta \in Nmk_0(\sqrt{-1})/k_0$, а идемпотент $e_5 : k_0(\theta)$ — поле разложения для алгебры $D_A e_5$, что согласуется с результатами [6] и других работ Б. Б. Лурье. Как показано в работах Б. Б. Лурье, это условие равносильно тому, что -1 есть сумма четырех квадратов в поле k_0.

3. Следствия для полей алгебраических чисел

Согласно [7], второе препятствие задачи с абелевым ядром определяется набором циклических алгебр над подполями поля k. Там же установлено, что для разрешимости задачи погружения с абелевым ядром локальных полей условие согласности необходимо и достаточно. В работе [8] на основании этих двух фактов второе препятствие той же задачи, но для полей алгебраических чисел, вычисляется в форме инвариантов.

В [9] установлено, что для разрешимости задачи погружения с произвольным ядром локальных полей условие согласности необходимо и достаточно, но только в случае неабелева ядра накладывается существенное ограничение, состоящее в том, что число образующих группы G равно числу образующих группы F. Исчезновение второго препятствия для задачи с неабелевым ядром порядка p^n, как мы видели, сводится к задаче согласования циклических алгебр и к тому, что $k_0(\theta)$ — поле разложения для $D_A e_\chi$. Таким образом, в одной своей части условие исчезновения второго препятствия для задачи с неабелевым ядром совпадает по форме с тем же условием для задач с абелевым ядром.

По работе [8] можно непосредственно проследить, что задача согласования циклических алгебр для случая неабелева ядра точно так же сводится к обращению в единицу всех корневых функций, определение корневых функций см. там же.

Итак, имеем

Следствие 1. *Пусть при всех предположениях теоремы* 1 k — *поле алгебраических чисел, пусть также число образующих группы G равно числу образующих группы F. Тогда для исчезновения второго препятствия задачи* (1) *необходимо и достаточно, во-первых, обращение в единицу всех корневых функций и, во-вторых, чтобы* $k_0(\theta)$ *было полем разложения для* $D_A e_\chi$.

Так же по [8] прослеживается

Следствие 2. *Если при всех предположениях следствия* 1 *наибольший делитель чисел* $g(\mathfrak{p})$ (*см.* [8]), *где* $\mathfrak{p} \in k_0$ — *произвольный простой ди-*

визор, то циклические алгебры, возникшие из задачи погружения (1), *всегда можно согласовать.*

Точно так же можно сформулировать другие следствия, соответствующие аналогичным утверждениям [8].

В заключение отметим, что на данную работу и на работу [1] оказали большое влияние в идейном отношении работы [10, 11] и работы Б. Б. Лурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полевицкая О.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **32**, № 1, 46—50 (1983).
2. *Лурье Б. Б.* Математич. заметки, **2**, № 3, 233—238 (1967).
3. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., «Наука», 1969.
4. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца. М., «Мир», 1969.
5. *Джекобсон Н.* Теория колец. М., ИЛ, 1947.
6. *Лурье Б. Б.* Тр. МИАН, **80**, 98—101 (1967).
7. *Дёмушкин С. П., Шафаревич И. Р.* Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, № 6, 823—840 (1959).
8. *Дёмушкин С. П., Шафаревич И. Р.* Изв. АН СССР, сер. матем., **26**, № 6, 911—925 (1962).
9. *Лурье Б. Б.* Записки науч. семинаров ЛОМИ, **31**, 106—114 (1973).
10. *Шмидт Р. А., Яковлев А. В.* Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астр., **13**, вып. 3, 137—140 (1963).
11. *Фаддеев Д. К., Шмидт Р. А.* Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астр., **19**, вып. 4, 36—43 (1959).

Всесоюзное аэрологическое научно-производственное объединение «Аэрогеология» Министерства геологии СССР

Поступила в редакцию
23/IV 1985

O. POLEVITSKAJA

SUVALISE p^n JÄRKU TUUMAGA SISESTUSÜLESANDE TEISE TÕKKE ARVUTAMISEST

Käesolev töö on eelmise kirjutise [1] järg. On esitatud täpsustused eelmise töö kohta, toodud näide teise takistuse arvutamisest ning formuleeritud järeldused algebraliste arvude väljade puhuks.

O. POLEVITSKAYA

ON THE EMBEDDING PROBLEM WITH AN ARBITRARY KERNEL OF ORDER p^n

The paper is a sequel to [1]. Here we present some comments to [1]. An instance of calculating a second obstacle is given. It is followed by the deductions for the fields of algebraic numbers.