EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 3

УДК 62.50

Юлле КОТТА

СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Ülle KOTTA. OLEKU TAASTAJA KONSTRUEERIMINE DISKREETSE AJAGA BILINEAARSETE SÜSTEEMIDE JAOKS

Ülle KOTTA. OBSERVER DESIGN FOR DISCRETE TIME BILINEAR SYSTEMS

(Представил Н. Алумяэ)

1. Введение. Задача синтеза наблюдателя для билинейных систем привлекает внимание многих авторов [1–10]. Основная трудность при решении ее заключается в том, что надо обеспечить асимптотическую устойчивость системы, описывающей поведение ошибки восстановления, в то время как динамика ошибки зависит от управления. Для этого существуют два приема. Первый требует, чтобы наблюдаемая система удовлетворяла неким сильным структурным ограничениям, которые обеспечивают описание динамики ошибки линейной, устойчивой, стационарной системой [1]. Другой способ можно применять при любых билинейных системах, но при этом требуется ограничить пространство допустимых управлений. Рассматривались случаи равномерно ограниченных входов [2–5] и экспоненциально ограниченных входов [6]. В последнем случае синтез наблюдателя особенно прост. Во всех этих работах рассматривались системы с непрерывным временем. Целью нашей работы было распространение результатов работы [6] на системы с дискретным временем.

2. Основной результат. Рассмотрим билинейную систему с дискретным временем

$$x(t+1)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m} B_i x(t) u_i(t)+Cu(t),$$
$$y(t)=Dx(t), \tag{1}$$

где $x\in R^n$, $u=[u_1, \ldots, u_m]\in R^m$, $y\in R^p$ $(p<n)$, а матрицы $A, B_1, \ldots$ $\ldots, B_m$, C и D подходящей размерности. Начальное состояние $x(0)$ неизвестно, входы $u(t)$ и выходы $y(t)$ при $t=1, 2, \ldots$ известны. Предположим, что входы являются экспоненциально устойчивыми

$$|u_i(t)|\leqslant r_1 r_2^{-t},\quad r_1>0,\quad r_2>1,\quad i=1, \ldots, m.$$

Ставится задача восстановить состояние $x(t)$ системы (1) по наблюдаемым переменным $u(t)$ и $y(t)$. Для решения подобных задач обычно вводят другую динамическую систему, т. н. наблюдатель

$$z(t+1)=Az(t)+\sum_{i=1}^{m} B_i z(t) u_i(t)+Cu(t)+$$
$$+G[u(t)]\{y(t)-Dz(t)\}, \tag{2}$$
$$G[u(t)]=G_0+\sum_{i=1}^{m} G_i u_i(t),$$

состояние $z(t)$ которой должно являться аппроксимацией состояния $x(t)$ в определенном смысле.

Из уравнений (1) и (2) следует, что ошибка восстановления $e(t)=$ $=x(t)-z(t)$ удовлетворяет билинейному уравнению

$$e(t+1)=\left[\tilde{A}+\sum_{i=1}^{m}\tilde{B}_i u_i(t)\right]e(t); \tag{3}$$

где $\tilde{A}=A-G_0D$ и $\tilde{B}_i=B_i-G_iD$.

Определение. *Билинейная система* (3) *экспоненциально устойчива, если существуют такие* $\mu>0$ *и* $\lambda>1$, *что все решения системы* (3) *обладают свойством*

$$\|e(t)\|\leqslant\mu\lambda^{-t}\|e(0)\|$$

при любых $t=1, 2, \ldots, e(0)\in R^n$ *и допустимых* $u(.)$.
Докажем следующую теорему.

Теорема. *Билинейная система* (3) *является при экспоненциально ограниченных входах экспоненциально устойчивой, если выполнены следующие условия:*

1) $\|\tilde{A}^t\|\leqslant s_1 s_2^{-t}, \quad s_1>0, \quad s_2>1,$

2) $r_1<\left(1-\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{1}{Mms_1s_2}$, где $M=\max\limits_{i=1,\ldots,m}\|\tilde{B}_i\|$.

Доказательство. Выпишем решение уравнения (3)

$$e(t)=\tilde{A}^t e(0)+\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{k_1=0}^{t-1}\tilde{A}^{t-k_1-1}\tilde{B}_{i_1}\tilde{A}^{k_1}e(0)u_{i_1}(k_1)+$$
$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{k_1=0}^{t-2}\sum_{k_2=k_1+1}^{t-1}\tilde{A}^{t-k_2-1}\tilde{B}_{i_2}A^{k_2-k_1-1}\tilde{B}_{i_1}\tilde{A}^{k_1}\times$$
$$\times e(0)u_{i_1}(k_1)u_{i_2}(k_2)+\ldots$$
$$\ldots+\sum_{i_1,\ldots,i_t=1}^{m}\tilde{B}_{i_t}\ldots\tilde{B}_{i_1}e(0)u_{i_1}(0)\ldots u_{i_t}(t-1).$$

Воспользуясь свойствами нормы

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|,$$
$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|,$$
$$\|cA\|=|c|\,\|A\|,$$

получим

$$\|e(t)\|\leqslant s_1 s_2^{-t}\|e(0)\|+m\sum_{k_1=0}^{t-1}s_1 s_2^{-t+k_1+1}Ms_1 s_2^{-k_1}r_1 r_2^{-k_1}\|e(0)\|+$$
$$+m^2\sum_{k_1=0}^{t-2}\sum_{k_2=k_1+1}^{t-1}s_1 s_2^{-t+k_2+1}Ms_1 s_2^{-k_2+k_1+1}Ms_1 s_2^{-k_1}\|e(0)\|r_1 r_2^{-k_2}r_1 r_2^{-k_1}+\ldots\leqslant$$
$$\leqslant s_1 s_2^{-t}\|e(0)\|\left\{1+s_1 s_2 mMr_1\sum_{k_1=0}^{t-1}r_2^{-k_1}+\right.$$
$$\left.+s_1^2 s_2^2 m^2M^2r_1^2\sum_{k_1=0}^{t-2}r_2^{-k_1}\sum_{k_2=k_1+1}^{t-1}r_2^{-k_2}+\ldots\right\}\leqslant$$

$$\leqslant s_1 s_2^{-t} \| e(0) \| \left\{ 1 + s_1 s_2 m M r_1 \frac{r_2}{r_2 - 1} + s_1^2 s_2^2 m^2 M^2 r_1^2 \left(\frac{r_2}{r^2 - 1} \right)^2 + \ldots \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s_1 s_2^{-t}}{1 - \mu_1} \| e(0) \|,$$

где $\mu_1 = s_1 s_2 m M r_1 \frac{r_2}{r_2 - 1}$.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что для решения поставленной задачи мы должны выбрать в уравнениях наблюдателя (2) G_0 таким образом, чтобы все собственные числа матрицы $A - G_0 D$ были расположены внутри единичного круга. Это гарантирует выполнение первого условия теоремы.

Из теории линейных систем хорошо известно, что этого можно добиться, если (A, D) наблюдаемая пара. Выбор матриц G_i, $i = 1, \ldots, m$ и начального состояния наблюдателя $z(0)$ произвольный.

3. Пример. Рассмотрим систему

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 2{,}2 & -0{,}1 \\ 10 & 0{,}2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} x(t) u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \;\; 0] x(t).$$

Если мы выберем в уравнениях наблюдателя $G_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10{,}6 \end{bmatrix}$, то $\bar{A} = A - G_0 D = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}$ удовлетворяет условиям теоремы. Мы можем взять, например, $s_2 = 2$ и $s_1 = 1{,}6$. Выбор G_1 произвольный. Выберем $G_1 = 0$. При таком выборе G_1, s_1 и s_2, величины m_1 и m_2 должны удовлетворять следующему неравенству $m_1 < 5(m_2 - 1)/1{,}4 \cdot 2 \cdot 8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hara, S., Furuta, K.* Int. J. Contr., **24**, № 5, 705—718 (1976).
2. *Derese, I., Stevens, P., Noldus, E.* Int. J. Syst. Sci., **10**, № 6, 649—668 (1979).
3. *Derese, I. A., Noldus, E. J.* IEEE Trans. Autom. Contr., **26**, № 2, 590—592 (1981).
4. *Adachi, Y., Funahashi, Y.* Inform. Sci. **19**, № 1, 67—80 (1979).
5. *Adachi, Y., Funahashi, Y.* Trans. Inst. Electron. and Commun. Eng., **E62**, № 6, 407 (1979).
6. *Hsu, C. S., Karanam, V. R.* Trans. ASME. J. Dyn. Systems, Meas. and Contr., **105**, № 3, 206—208 (1983).
7. *Williamson D.* Automatica, **13**, № 3, 243—254 (1977).
8. *Derese, I., Stevens P., Noldus, E.* Journal A, **20**, № 4, 193—202 (1979).
9. *Funahashi, Y.*, Res. Rep. Autom. Control Lab. Fac. Eng. Nagoya Univ., **126**, 53—60 (1979).
10. *Funahashi, Y.* Res. Rep. Autom. Control Lab. Fac. Eng. Nagoya Univ., **126**, 46—52 (1979).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
2/XI 1984