

Р.-К. ЛОЙДЕ

ОБ УРАВНЕНИИ БАБА—ГУПТЫ

R.-K. LOIDE. BHABHA—GUPTA VORRANDIST

R.-K. LOIDE. ON THE BHABHA—GUPTA EQUATION

(Представил Х. Керес)

1. Рассмотрим уравнение Баба—Гупты (БГ) для частиц со спинами $3/2$ и $1/2$ [1, 2]. Исследование причинности показало [3], что подходящим выбором свободных параметров в уравнении можно избежать непричинного распространения, но этот выбор делает полный заряд в свободной теории индефинитным. Оказалось, что дефинитность заряда зависит от параметра, который в решениях уравнения БГ никакой роли не играет. В [4] показано, что дефинитность полного заряда зависит от масс-параметра λ спина $1/2$. Здесь мы покажем, что отмеченные выше два параметра зависимы и уравнение БГ поэтому зависит от двух свободных параметров. Оказалось, что знание инвариантного скалярного произведения, которое определяет эрмитизирующую матрицу Λ , очень важно, так как корректный лагранжиан и плотность заряда зависят от выбора матрицы Λ .

2. Оригинальная лагранжева плотность БГ следующая [2, 3]:

$$L = -\bar{\psi}_\mu (i\hat{\partial} - m) \psi^\mu + \frac{i}{3} \bar{\psi}_\mu (\gamma^\mu \partial_\nu + \partial^\mu \gamma_\nu) \psi^\nu - \frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (i\hat{\partial} + m) \gamma_\nu \psi^\nu - \\ - a \bar{\varphi} (i\hat{\partial} - \lambda m) \varphi - id (\bar{\varphi} \partial_\nu \psi^\nu + \bar{\psi}_\mu \partial^\mu \varphi), \quad (1)$$

где ψ^μ — вектор-биспинор, φ — биспинор, $\bar{\psi}_\mu = \psi_\mu + \gamma^0$, $\bar{\varphi} = \varphi + \gamma^0$ и a, d, λ — действительные константы.

Варьирование относительно $\bar{\psi}_\mu$ и $\bar{\varphi}$ дает уравнение БГ

$$(i\hat{\partial} - m) \psi^\mu - \frac{i}{3} (\gamma^\mu \partial_\nu + \partial^\mu \gamma_\nu) \psi^\nu + \frac{1}{3} \gamma^\mu (i\hat{\partial} + m) \gamma_\nu \psi^\nu + id \partial^\mu \varphi = 0, \quad (2) \\ a (i\hat{\partial} - \lambda m) \varphi + id \partial_\nu \psi^\nu = 0.$$

В [3] показано, что распространение БГ частиц во внешнем электромагнитном поле причинное, если $3d^2 = 2a$. Полные заряды спинов $3/2$ и $1/2$ следующие: $Q_{3/2} = \int d^3x \vec{\psi}^+ \vec{\psi}$, $Q_{1/2} = -a \int d^3x \varphi^+ \varphi$. В причинном случае $a > 0$ полный заряд индефинитен.

В [4] уравнение БГ записано в другом, но эквивалентном виде

$$(i\hat{\partial} - m) \psi^\mu - \frac{i}{3} (\partial^\mu - \gamma^\mu \hat{\partial}) \gamma_\nu \psi^\nu - i \gamma^\mu \partial_\nu \psi^\nu + id (\partial^\mu - \gamma^\mu \hat{\partial}) \varphi = 0, \quad (3) \\ (\lambda^{-1} i\hat{\partial} - m) \varphi + id (a\lambda)^{-1} \partial_\nu \psi^\nu = 0,$$

и показано, что дефинитность заряда зависит от масс-параметра λ спина $1/2$. Это различие решается с учетом инвариантного скалярного произведения, которое определяет эрмитизирующую матрицу Λ .

3. Теперь покажем, что имеются только два независимых параметра: масс-параметр λ спина $1/2$ и параметр d . Причинность зависит от выбора параметра d . Параметр a — зависимый и удовлетворяет $a\lambda = -1$.

Наше уравнение (3) записано в стандартной форме волнового уравнения первого порядка

$$(i\partial_\rho\beta^0 - m)\Psi = 0, \quad (4)$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^\mu \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

β^0 -матрица уравнения (4) имеет вид

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}\gamma^1 & \frac{2}{3}\gamma^0 & \frac{1}{3}\gamma^1\gamma^0\gamma_2 & \frac{1}{3}\gamma^1\gamma^0\gamma_3 & -d\gamma^1\gamma^0 \\ -\frac{2}{3}\gamma^2 & \frac{1}{3}\gamma^2\gamma^0\gamma_1 & \frac{2}{3}\gamma^0 & \frac{1}{3}\gamma^2\gamma^0\gamma_3 & -d\gamma^2\gamma^0 \\ -\frac{2}{3}\gamma^3 & \frac{1}{3}\gamma^3\gamma^0\gamma_1 & \frac{1}{3}\gamma^3\gamma^0\gamma_2 & \frac{2}{3}\gamma^0 & -d\gamma^3\gamma^0 \\ d(a\lambda)^{-1} & 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1}\gamma^0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Инвариантное скалярное произведение, которое определяет матрицу Λ , следующее:

$$\Psi^+\Lambda\Psi = \bar{\psi}_\mu \left(\frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma_\nu - \eta^{\mu\nu} \right) \psi^\nu + \bar{\varphi}\varphi. \quad (7)$$

Матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\gamma^0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \gamma^1 & 2\gamma^0 & \gamma^1\gamma^0\gamma_2 & \gamma^1\gamma^0\gamma_3 & 0 \\ \gamma^2 & \gamma^2\gamma^0\gamma_1 & 2\gamma^0 & \gamma^2\gamma^0\gamma_3 & 0 \\ \gamma^3 & \gamma^3\gamma^0\gamma_1 & \gamma^3\gamma^0\gamma_2 & 2\gamma^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\gamma^0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Так как β^0 и Λ должны удовлетворять $(\beta^0)^+\Lambda = \Lambda\beta^0$, из (6) и (8) получим

$$a\lambda = -1. \quad (9)$$

Обычно L варьируют относительно дираковски сопряженных величин $\bar{\psi}_\mu$ и $\bar{\varphi}$. Чтобы вывести уравнение (4), надо варьировать L относительно новых сопряженных величин $\tilde{\psi}_\nu = \bar{\psi}_\mu \left(\frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma_\nu - \eta^{\mu\nu} \right)$ и $\bar{\varphi}$.

Корректный лагранжиан БГ из-за (9) следующий:

$$L = -\bar{\psi}_\mu (i\hat{\partial} - m)\psi^\mu + \frac{i}{3}\bar{\psi}_\mu (\gamma^\mu\partial_\nu + \partial^\mu\gamma_\nu)\psi^\nu - \frac{1}{3}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu (i\hat{\partial} + m)\gamma_\nu\psi^\nu + \bar{\varphi}(\lambda^{-1}i\hat{\partial} - m)\varphi - id(\bar{\varphi}\partial_\nu\psi^\nu + \bar{\psi}_\mu\partial^\mu\varphi), \quad (10)$$

где λ и d два произвольных параметра.

4. Алгебраическая структура уравнения БГ следующая. Если разложить β^0 -матрицу $\beta^0 = \beta^{1/2} + \beta^{1/2}$ [5, 6], получим следующие минимальные уравнения

$$\begin{aligned} (\beta^{1/2})^3 = \beta^{1/2}, \quad (\beta^{1/2})^3 = \lambda^{-2} \beta^{1/2}, \quad \text{когда } 3d^2\lambda = -2, \\ (\beta^{1/2})^4 = \lambda^{-2} (\beta^{1/2})^2, \quad \text{когда } 3d^2\lambda \neq -2. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение БГ, следовательно, описывает две частицы: одну со спином $3/2$ и массой m , и другую со спином $1/2$ и массой λm . В случае $3d^2\lambda = -2$ β^0 -матрица является диагонализуемой, в остальных случаях нет, также уравнение БГ является причинным [3, 4]. Этот результат согласуется с выводом [7], что уравнения с диагонализуемыми β -матрицами причинные. В [4] показано, что не причинное распространение связано с нильпотентными состояниями, которые в случае свободного поля элиминированы нильпотентностью.

5. В системе покоя частиц лагранжева плотность (10) дает следующую зарядовую плотность:

$$j^0 = \vec{\psi}^+ \vec{\psi} - \frac{1}{3} \vec{\psi}^+ \gamma^0 \vec{\psi} + \lambda^{-1} \varphi^+ \varphi = \vec{\psi}^+ \vec{\psi} + (\lambda^{-1} - 3d^2\lambda^2) \varphi^+ \varphi. \quad (12)$$

В случае спина $1/2$ мы имеем $\vec{\psi} = -d\lambda\vec{\psi}$, и это дает следующие полные заряды

$$Q_{3/2} = \int d^3x \vec{\psi}^+ \vec{\psi}, \quad Q_{1/2} = \lambda^{-1} \int d^3x \varphi^+ \varphi. \quad (13)$$

Из (13) видно, что дефинитность полного заряда зависит от знака масс-параметра λ спина $1/2$: если $\lambda > 0$, полный заряд дефинитен, если $\lambda < 0$ — индефинитен.

Интересно отметить, что в случае индефинитного полного заряда ($\lambda < 0$) состояния положительной энергии спина $1/2$ описываются с помощью отрицательных собственных значений γ -матриц. В случае других известных уравнений такой ситуации не наблюдается и оно объясняется тем, что эрмитизирующая матрица Λ связывает поля ψ^μ и φ . Спин $1/2$ в данном случае описывается уравнением Дирака для φ , причем остальные компоненты — зависимые (в системе покоя, например, $\psi^0 = 0$, $\vec{\psi} = -d\lambda\vec{\psi}$).

Что касается соотношения между a и λ , то оно зависит от выбора инвариантного скалярного произведения. Если вместо (7) выбрать $\Psi^+ \Lambda \Psi = \bar{\psi}_\mu \left(\frac{1}{3} \gamma^\mu \gamma_\nu - \eta^\mu_\nu \right) \psi^\nu - \bar{\varphi} \varphi$; получим $a\lambda = 1$. Распространение причинное, когда $3d^2\lambda = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhabha, H. J. Phil. Mag., 43, № 1, 33—47 (1952).
2. Gupta, K. K. Proc. Roy. Soc. (London), A222, № 1, 118—127 (1954).
3. Prabhakaran, J., Seetharaman, M., Mathews, P. M. J. Phys. A: Math. Gen., 8, № 4, 560—565 (1975).
4. Loide, R.-K. ENSV TA Toim. Füüs. Matem., 32, № 2, 172—178 (1983).
5. Loide, K., Loide, R.-K. Preprint F-6. Tartu, 1977.
6. Kõiv, M., Loide, R.-K. J. Phys. A: Math. Gen., 16, № 11, 2353—2361 (1983).
7. Amar, V., Dozzio, U. Lett. Nuovo Cim., 12, № 17, 659—662 (1975).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
19/X 1984