EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 3

УДК 539.12

Р.-К. ЛОЙДЕ

ОБ УРАВНЕНИИ БАБА—ГУПТЫ

R.-K. LOIDE. BHABHA—GUPTA VORRANDIST

R.-K. LOIDE. ON THE BHABHA—GUPTA EGUATION

(Представил Х. Керес)

1. Рассмотрим уравнение Баба—Гупты (БГ) для частиц со спинами $^3/_2$ и $^1/_2$ [1, 2]. Исследование причинности показало [3], что подходящим выбором свободных параметров в уравнении можно избежать непричинного распространения, но этот выбор делает полный заряд в свободной теории индефинитным. Оказалось, что дефинитность заряда зависит от параметра, который в решениях уравнения БГ никакой роли не играет. В [4] показано, что дефинитность полного заряда зависит от масс-параметра λ спина $^1/_2$. Здесь мы покажем, что отмеченные выше два параметра зависимы и уравнение БГ поэтому зависит от двух свободных метра не зависимы и уравнение БГ поэтому зависит от двух свободных параметров. Оказалось, что знание инвариантного скалярного произведения, которое определяет эрмитизирующую матрицу Λ, очень важно, так как корректный лагранжиан и плотность заряда зависят от выбора матрицы Λ.

2. Оригинальная лагранжева плотность БГ следующая [2, 3]:

$$L=-\bar{\psi}_\mu(i\hat{\partial}-m)\psi^\mu+\frac{i}{3}\bar{\psi}_\mu(\gamma^\mu\partial_\nu+\partial^\mu\gamma_\nu)\psi^\nu-\frac{1}{3}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu(i\hat{\partial}+m)\gamma_\nu\psi^\nu-$$

$$-a\bar{\varphi}(i\hat{\partial}-\lambda m)\varphi-id(\bar{\varphi}\partial_\nu\psi^\nu+\bar{\psi}_\mu\partial^\mu\varphi), \qquad (1)$$

где ψ^μ — вектор-биспинор, φ — биспинор, $\bar{\psi}_\mu=\psi_\mu^+\gamma^0$, $\bar{\varphi}=\varphi^+\gamma^0$ и a, d, λ — действительные константы.

Варьирование относительно $\bar{\psi}_\mu$ и $\bar{\varphi}$ дает уравнение БГ

$$(i\hat{\partial}-m)\psi^\mu-\frac{i}{3}(\gamma^\mu\partial_\nu+\partial^\mu\gamma_\nu)\psi^\nu+\frac{1}{3}\gamma^\mu(i\hat{\partial}+m)\gamma_\nu\psi^\nu+id\,\partial^\mu\varphi=0, \qquad (2)$$

$$a(i\hat{\partial}-\lambda m)\varphi+id\,\partial_\nu\psi^\nu=0.$$

В [3] показано, что распространение БГ частиц во внешнем электромагнитном поле причинное, если $3d^2=2a$. Полные заряды спинов $^3/_2$ и $^1/_2$ следующие: $Q_{3/2}=\int d^3x\,\vec{\psi}^+\vec{\psi}$, $Q_{1/2}=-a\int d^3x\,\varphi^+\varphi$. В причинном случае $a>0$ полный заряд индефинитен.

В [4] уравнение БГ записано в другом, но эквивалентном виде

$$(i\hat{\partial}-m)\psi^\mu-\frac{i}{3}(\partial^\mu-\gamma^\mu\hat{\partial})\gamma_\nu\psi^\nu-i\gamma^\mu\partial_\nu\psi^\nu+id(\partial^\mu-\gamma^\mu\hat{\partial})\varphi=0, \qquad (3)$$

$$(\lambda^{-1}i\hat{\partial}-m)\varphi+id(a\lambda)^{-1}\partial_\nu\psi^\nu=0,$$

и показано, что дефинитность заряда зависит от масс-параметра λ спина $^1/_2$. Это различие решается с учетом инвариантного скалярного произведения, которое определяет эрмитизирующую матрицу Λ.

3. Теперь покажем, что имеются только два независимых параметра: масс-параметр λ спина $^1/_2$ и параметр d. Причинность зависит от выбора параметра d. Параметр a — звисимый и удовлетворяет $a\lambda=-1$.

Наше уравнение (3) записано в стандартной форме волнового уравнения первого порядка

$$(i\partial_\rho\beta^\rho-m)\Psi=0, \tag{4}$$

где

$$\Psi=\begin{vmatrix}\psi^\mu\\ \varphi\end{vmatrix}. \tag{5}$$

β^0-матрица уравнения (4) имеет вид

$$\beta^0=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3}\gamma^1 & \frac{2}{3}\gamma^0 & \frac{1}{3}\gamma^1\gamma^0\gamma_2 & \frac{1}{3}\gamma^1\gamma^0\gamma_3 & -d\gamma^1\gamma^0\\ -\frac{2}{3}\gamma^2 & \frac{1}{3}\gamma^2\gamma^0\gamma_1 & \frac{2}{3}\gamma^0 & \frac{1}{3}\gamma^2\gamma^0\gamma_3 & -d\gamma^2\gamma^0\\ -\frac{2}{3}\gamma^3 & \frac{1}{3}\gamma^3\gamma^0\gamma_1 & \frac{1}{3}\gamma^3\gamma^0\gamma_2 & \frac{2}{3}\gamma^0 & -d\gamma^3\gamma^0\\ d(a\lambda)^{-1} & 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1}\gamma^0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Инвариантное скалярное произведение, которое определяет матрицу Λ, следующее:

$$\Psi^+\Lambda\Psi=\bar\psi_\mu\left(\frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma_\nu-\eta^\mu{}_\nu\right)\psi^\nu+\bar\varphi\varphi. \tag{7}$$

Матрица Λ имеет вид

$$\Lambda=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -2\gamma^0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0\\ \gamma^1 & 2\gamma^0 & \gamma^1\gamma^0\gamma_2 & \gamma^1\gamma^0\gamma_3 & 0\\ \gamma^2 & \gamma^2\gamma^0\gamma_1 & 2\gamma^0 & \gamma^2\gamma^0\gamma_3 & 0\\ \gamma^3 & \gamma^3\gamma^0\gamma_1 & \gamma^3\gamma^0\gamma_2 & 2\gamma^0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\gamma^0 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Так как β^0 и Λ должны удовлетворять $(\beta^0)^+\Lambda=\Lambda\beta^0$, из (6) и (8) получим

$$a\lambda=-1. \tag{9}$$

Обычно L варьируют относительно дираковски сопряженных величин $\bar\psi_\mu$ и $\bar\varphi$. Чтобы вывести уравнение (4), надо варьировать L относительно новых сопряженных величин $\tilde\psi_\nu=\bar\psi_\mu\left(\frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma_\nu-\eta^\mu{}_\nu\right)$ и $\bar\varphi$.

Корректный лагранжиан БГ из-за (9) следующий:

$$L=-\bar\psi_\mu(i\hat\partial-m)\psi^\mu+\frac{i}{3}\bar\psi_\mu(\gamma^\mu\partial_\nu+\partial^\mu\gamma_\nu)\psi^\nu-\frac{1}{3}\bar\psi_\mu\gamma^\mu(i\hat\partial+m)\gamma_\nu\psi^\nu+$$
$$+\bar\varphi(\lambda^{-1}i\hat\partial-m)\varphi-id(\bar\varphi\partial_\nu\psi^\nu+\bar\psi_\mu\partial^\mu\varphi), \tag{10}$$

где λ и d два произвольных параметра.

4. Алгебраическая структура уравнения БГ следующая. Если разложить β^0-матрицу $\beta^0=\beta^{3/2}+\beta^{1/2}$ [5, 6], получим следующие минимальные уравнения

$$(\beta^{3/2})^3=\beta^{3/2}, \quad (\beta^{1/2})^3=\lambda^{-2}\beta^{1/2}, \quad \text{когда} \quad 3d^2\lambda=-2,$$
$$(\beta^{1/2})^4=\lambda^{-2}(\beta^{1/2})^2, \quad \text{когда} \quad 3d^2\lambda\neq-2. \tag{11}$$

Уравнение БГ, следовательно, описывает две частицы: одну со спином $3/2$ и массой m, и другую со спином $1/2$ и массой λm. В случае $3d^2\lambda=-2$ β^0-матрица является диагонализуемой, в остальных случаях нет, также уравнение БГ является причинным [3, 4]. Этот результат согласуется с выводом [7], что уравнения с диагонализуемыми β-матрицами причинные. В [4] показано, что непричинное распространение связано с нильпотентными состояниями, которые в случае свободного поля элиминированы нильпотентностью.

5. В системе покоя частиц лагранжева плотность (10) дает следующую зарядовую плотность:

$$j^0=\vec{\psi}^+\vec{\psi}-\frac{1}{3}\vec{\psi}^+\vec{\gamma}\gamma^0\vec{\gamma}\vec{\psi}+\lambda^{-1}\varphi^+\varphi=\vec{\psi}^+\vec{\psi}+(\lambda^{-1}-3d^2\lambda^2)\varphi^+\varphi. \tag{12}$$

В случае спина $1/2$ мы имеем $\vec{\psi}=-d\lambda\vec{\gamma}\varphi$, и это дает следующие полные заряды

$$Q_{3/2}=\int d^3x\vec{\psi}^+\vec{\psi}, \qquad Q_{1/2}=\lambda^{-1}\int d^3x\varphi^+\varphi. \tag{13}$$

Из (13) видно, что дефинитность полного заряда зависит от знака масс-параметра λ спина $1/2$: если $\lambda>0$, полный заряд дефинитен, если $\lambda<0$ — индефинитен.

Интересно отметить, что в случае индефинитного полного заряда ($\lambda<0$) состояния положительной энергии спина $1/2$ описываются с помощью отрицательных собственных значений γ-матриц. В случае других известных уравнений такой ситуации не наблюдается и оно объясняется тем, что эрмитизирующая матрица Λ связывает поля ψ^μ и φ. Спин $1/2$ в данном случае описывается уравнением Дирака для φ, причем остальные компоненты — зависимые (в системе покоя, например, $\psi^0=0$, $\vec{\psi}=-d\lambda\vec{\gamma}\varphi$).

Что касается соотношения между a и λ, то оно зависит от выбора инвариантного скалярного произведения. Если вместо (7) выбрать $\Psi^+\Lambda\Psi=\bar{\psi}_\mu\left(\frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma_\nu-\eta^\mu{}_\nu\right)\psi^\nu-\bar{\varphi}\varphi;$ получим $a\lambda=1$. Распространение причинное, когда $3d^2\lambda=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bhabha, H. J.* Phil. Mag., **43**, № 1, 33—47 (1952).
2. *Gupta, K. K.* Proc. Roy. Soc. (London), **A222**, № 1, 118—127 (1954).
3. *Prabhakaran, J., Seetharaman, M., Mathews, P. M.* J. Phys. A: Math. Gen., **8**, № 4, 560—565 (1975).
4. *Loide, R.-K.* ENSV TA Toim. Füüs. Matem., **32**, № 2, 172—178 (1983).
5. *Loide, K., Loide, R.-K.* Preprint F-6. Tartu, 1977.
6. *Kõiv, M., Loide, R.-K.* J. Phys. A: Math. Gen., **16**, № 11, 2353—2361 (1983).
7. *Amar, V., Dozzio, U.* Lett. Nuovo Cim., **12**, № 17, 659—662 (1975).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
19/X 1984