

Ф. КАПЛАНСКИЙ

О ДИФФУЗИИ КРУГОВОЙ ВИХРЕВОЙ НИТИ

F. KAPLANSKI. UMARA KEERISNIIDI DIFUSIOONIST

F. KAPLANSKI. ON THE DIFFUSION OF THE CIRCULAR VORTEX LINE

(Представил И. Эник)

Рассматривается аналог классической задачи о диффузии прямолинейной вихревой нити с целью описания движения кольцевого вихря. Перенос завихренности ζ описывается уравнением

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (v\zeta) + \frac{\partial}{\partial x} (u\zeta) = v^* \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{q}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{q\zeta}{r^2} \right], \quad (1)$$

которое при $q = 1$ соответствует осесимметричной задаче, а при $q = 0$ — плоской; x, r — оси цилиндрической системы координат при $q = 1$ или оси декартовой системы при $q = 0$. Функция тока введена формулами

$$u = \frac{1}{r^q} \frac{\partial \psi}{\partial r} - V(t), \quad v = -\frac{1}{r^q} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и может быть найдена как решение уравнения Пуассона

$$-\zeta r^q = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{q}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь $V(t)$ — скорость вихревого кольца, равная $\frac{dx_0(t)}{dt}$, где $x_0(t)$ — пройденное вихрем расстояние.

Начальное условие определяется условиями образования вихревого кольца или вихревой пары: при $t = 0$ функция $\zeta(r, x, 0)$ равна нулю всюду, кроме точки $r = a$, где она бесконечна (круговая вихревая нить радиуса a при $q = 1$ или две противоположно направленных прямолинейных вихревых нити на расстоянии $2a$ при $q = 0$).

Краевые условия

$$\begin{aligned} \zeta = \psi = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 \quad (\text{условие симметрии}), \\ \zeta, \psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + r^2 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя (1) при условиях (3) получим условие сохранения

$$\frac{(2\pi)^q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r^{q+1} \zeta(r, x, t) dx dr = B. \quad (4)$$

Рассматриваются две модели.

I. Ламинарное вихревое кольцо, когда $v^* = v$ — коэффициент молекулярной вязкости.

II. Турбулентное вихревое кольцо, когда $v^* = v_* t^{-\frac{1}{3-q}}$, где v_* — постоянная величина, которая должна определяться сравнением результатов расчета и эксперимента. Здесь зависимость от времени для коэффициента турбулентной вязкости, предложенная для стадии автомодельного развития вихря [1], формально распространена и на начальную стадию его развития.

В развитие результатов А. Калтаева [2] выпишем точное решение осесимметричной и плоской задачи для I и II моделей в пренебрежении конвекцией относительно движущегося вихря (решение найдено методом разделения переменных)

$$\zeta = At^{-\alpha} e^{-\frac{(x-x_0(t))^2+r^2+a^2}{2p}} \cdot f\left(\frac{ra}{p}\right) \quad (5)$$

Выражения α , p , f и A приведены в таблице.

q	Модель	α	p	f	A
0	I	1	$2vt$	$sh(m)$	$B/4\pi va$
0	II	$2/3$	$3v_* t^{2/3}$	$sh(m)$	$B/6\pi v_* a$
1	I	$3/2$	$2vt$	$I_1(m)$	$B/4(\pi v)^{3/2} a$
1	II	$3/4$	$4v_* t^{1/2}$	$I_1(m)$	$B/(2\pi v_*)^{3/2} a$

Здесь I_1 — модифицированная функция Бесселя, A определяется условием нормировки (4). При малых значениях $\frac{a}{\sqrt{p}}$ для $r \leq ca$ (c — любое конечное число), используя разложения в ряды $I_1\left(\frac{ra}{p}\right)$ и $e^{-\frac{a^2}{2p}}$, получим приближение (5), совпадающее с ранее найденными автомодельными решениями [3-5]

$$\zeta = At^{-\alpha} e^{-\frac{(x-x_0(t))^2+r^2}{2p}} \left(\frac{ra}{4p} + 0\left(c\left(\frac{a^4}{8p^2}\right)\right) \right). \quad (6)$$

При больших значениях $\frac{a}{\sqrt{p}}$ для $r \geq \frac{a}{c}$ при использовании асимптотического представления $I_1\left(\frac{ra}{p}\right)$ имеем другое приближение (5)

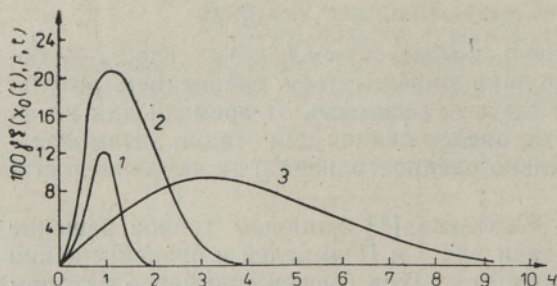
$$\zeta = At^{-\alpha} e^{-\frac{(x-x_0(t))^2+(r-a)^2}{2p}} \sqrt{\frac{p}{2\pi ra}} \left(1 + 0\left(\frac{cp}{a^2}\right) \right). \quad (7)$$

Радиальные координаты характерной точки максимума вихря из (6) и (7) определяются по формулам

$$r_m = \sqrt{p}, \quad (8)$$

$$r_m = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{p}{2}}.$$

Таким образом, в явлении диффузии круговой вихревой нити в безграничной жидкости можно выделить две стадии, описываемые выраже-



Изменение линейного решения с течением времени. 1 — $t=0,1$, $\gamma=10^{-2/3}$ (описывается приближением (6)); 2 — $t=1$, $\gamma=1$; 3 — $t=10$, $\gamma=10^{-2/3}$ (описываются приближением (7); модель I, $q=1$, $v=0,5$).

ниями (7) и (6). В первой из них резко выраженная тороидальная структура вихря развивается неавтомодельно. Во второй стадии происходит автомодельное развитие формы вихря при потере тороидальности. Аналогичная ситуация сохраняется и для плоской задачи. Переход вихря из первой стадии во вторую (изменение распределения завихренности с увеличением параметра $\frac{a}{\sqrt{\rho}}$) иллюстрирует рисунок. Концентрированное распределение завихренности (кривая 1) согласуется с единственным детальным экспериментальным исследованием кольцевого вихря при использовании лазерного доплеровского измерителя, определяющего две компоненты скорости [6]. Отметим, что найденное решение (5) является решением полной задачи (1) — (4) при $\frac{B}{v^2 t} \rightarrow 0$ для первой модели [3] и при $v_* \rightarrow \infty$ для второй модели [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Луговцов А. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф. Динамика сплошной среды, вып. III, 50—60 (1969).
2. Калтаев А. В кн.: Динамика сплошной среды. Алма-Ата, КазГУ, 1982, 63—70.
3. Еришин Ш. А., Калтаев А. В кн.: Прикладная механика. Применение математических методов в естествознании. Алма-Ата, КазГУ, 1979, 164—169.
4. Луговцов Б. А. В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. М., «Наука», 1970, 182—189.
5. Капланский Ф., Эпштейн А. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 22, № 4, 386—393 (1973).
6. Sullivan, J. P., Widnall, S. E. AIAA Journal, 11, № 10, 1384—1389 (1973).

Институт термодинамики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
7/IX 1983