EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS
1984, 33, 3

УДК 519.2.24

В. ОЛЬМАН

ТОЧЕЧНАЯ МИНИМАКСНАЯ ОЦЕНКА СЛУЧАЙНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА АПРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

V. OLMAN. JUHUSLIKU TÕENÄOSUSE MINIMAKS PUNKTHINNANG KITSENDATUD APRIOORSE JAOTUSE KORRAL

V. OLMAN. POINT MINIMAX ESTIMATOR OF A RANDOM PROBABILITY UNDER RESTRICTIONS ON A PRIORI DISTRIBUTION

(Представил Н. Алумяэ)

Решаемая здесь задача формулируется следующим образом. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые реализации биномиальной случайной величины X, т. е. $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$. Параметр p тоже является случайной величиной, про распределение которой известно лишь, что оно принадлежит некоторому классу $\mathcal{F}$. Риск используемой процедуры $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при оценивании параметра p имеет вид

$$R(\delta, p) = E_p(\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) - p)^2.$$

Задача заключается в нахождении такой $\mathcal{F}$-допустимой процедуры оценивания δ_0 [1], что

$$\inf_{\delta\in B_{\mathcal{F}}} \sup_{0\leqslant p\leqslant 1} R(\delta, p) = \sup_{0\leqslant p\leqslant 1} R(\delta_0, p), \qquad (1)$$

где $B_{\mathcal{F}}$ — множество всех $\mathcal{F}$-допустимых оценок, т. е. таких, для которых не существует δ^* со свойством $\int_0^1 R(\delta, p)\,dF(p) \geqslant \int_0^1 R(\delta^*, p)\,dF(p)$ $\forall F\in\mathcal{F}$ и со строгим неравенством хотя бы для одного $F\in\mathcal{F}$. В настоящей работе эта задача решается для класса $\mathcal{F}$, описанного в [1], т. е. $G\in\mathcal{F}$, если

1) $G(p+0)+G(1-p)=1,\quad 0\leqslant p\leqslant 1,$
2) $G(p)$ вогнута на интервале $(0, 1/2)$.

Как показано в [1], класс $\mathcal{F}$-допустимых процедур совпадает с множеством байесовских оценок относительно элементов класса $\mathcal{F}$. Таким образом, с учетом того, что $y=\sum_{i=1}^{n} x_i$ — достаточная статистика, общий вид оценок из класса $B_{\mathcal{F}}$ следующий [2]:

$$\delta_F(y)=\frac{\int\limits_0^1 p^{y+1}(1-p)^{n-y}\,dF(p)}{\int\limits_0^1 p^{y}(1-p)^{n-y}\,dF(p)}, \quad F\in\mathcal{F}, \tag{2}$$

т. е. δ_F — это оценка, байесовская относительно распределения F.

Теорема. *Решением задачи* (1) *при* $n\geqslant 4$ *является оценка* $\delta^*(y)=\frac{y+1}{n+2}$, *байесовская относительно равномерного на* $[0,1]$ *распределения* $F_0(p)$, *т. е.* $F_0(p)=0$, $p\leqslant 0$, $F_0(p)=p$, $0\leqslant p\leqslant 1$.

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что

$$R(\delta^*,p)=\frac{p^2(4-n)+p(n-4)+1}{(n+2)^2}, \quad \text{и следовательно,}$$

$$\sup_{0\leqslant p\leqslant 1} R(\delta^*,p)=R(\delta^*,1/2).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$R(\delta_F,1/2)\geqslant R(\delta^*,1/2) \quad \forall\, F\in\mathcal{F}. \tag{3}$$

Из вида (2) $\mathcal{F}$-допустимых оценок получаем

$$\delta_F(y)=\frac{\int\limits_0^{1/2}[p^{y+1}(1-p)^{n-y}+(1-p)^{y+1}p^{n-y}]\,dF(p)}{\int\limits_0^{1/2}[p^{y}(1-p)^{n-y}+(1-p)^{y}p^{n-y}]\,dF(p)}. \tag{4}$$

Используя это представление, легко убедиться, что для всех $F\in\mathcal{F}$ имеет место равенство

$$\delta_F(y)+\delta_F(n-y)=1, \quad y=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

Теперь покажем, что

$$\delta_F(y)\geqslant\delta^*(y)\geqslant 1/2, \quad y\geqslant n/2, \quad \forall\, F\in\mathcal{F}. \tag{6}$$

То, что $\delta^*(y)\geqslant 1/2$ при $y\geqslant n/2$ легко следует из самого вида оценки $\delta^*(y)$. Для доказательства левого неравенства в (6), используя формулу (4), перепишем его следующим образом:

$$\iint\limits_M u_y(p)v_y(s)\,dF(p)\,ds\geqslant\iint\limits_M v_y(p)u_y(s)\,dF(p)\,ds, \tag{7}$$

где $M=\{(p,s)\colon 0\leqslant p\leqslant 1/2,\ 0\leqslant s\leqslant 1/2\}$, $u_y(p)=$ $=p^{y+1}(1-p)^{n-y}+(1-p)^{y+1}p^{n-y}$, $v_y(p)=p^y(1-p)^{n-y}+p^{n-y}(1-p)^y$.

В силу симметрии множества M относительно прямой $p=s$ в неравенстве (7) можно перейти к интегрированию по множеству $M_{1/2}=$ $=\{(p,s)\colon 0\leqslant p\leqslant 1/2,\ 0\leqslant s\leqslant p\}$:

$$\iint\limits_{M_{1/2}}[u_y(p)v_y(s)\,dF(p)\,ds+u_y(s)v_y(p)\,dF(s)\,dp]\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{M_{1/2}}[u_y(s)v_y(p)\,dF(p)\,ds+v_y(s)u_y(p)\,dF(s)\,dp]. \tag{8}$$

Группируя подинтегральные выражения, получаем, что для доказательства (6) достаточно показать справедливость неравенства

$$u_y(p)v_y(s)\,[dF(p)\,ds-dF(s)\,dp]\geqslant v_y(p)u_y(s)\,[dF(p)\,ds-dF(s)\,dp]$$

для $0\leqslant s\leqslant p\leqslant 1/2$.

Выражение в квадратных скобках неположительно, так как $F \in \mathcal{F}$, и следовательно, $\frac{dF(t)}{dt}$ почти везде существует и не возрастает при $0 < t < 1/2$ [1]. Таким образом, осталось доказать, что

$$u_y(p)\, v_y(s) \leqslant v_y(p)\, u_y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant p \leqslant 1/2, \tag{9}$$

или, что $u_y(p)/v_y(p)$ не возрастает по p, $0 \leqslant p \leqslant 1/2$. Простыми преобразованиями получаем

$$u_y(p)/v_y(p) = \frac{1}{1+t}\, \frac{t^{s+1}}{t^s+1}, \tag{10}$$

где $t = p/(1-p)$, $s = 2y - n$.
Дифференцируя (10) по p, получаем

$$\frac{d}{dp}\, \frac{u_y(p)}{v_y(p)} = \frac{1-2p}{1-p}\, \frac{t^{2s} - 1 + st^{s-1}[t^2 - 1]}{(t^s+1)^2 (1+t)^2},$$

а так как $p \leqslant 1/2$ и $y < n/2$, то $s \geqslant 0$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, откуда $t^{2s} - 1 \leqslant 0$, $t^2 - 1 \leqslant 0$, и следовательно,

$$\frac{d}{dp}\, \frac{u_y(p)}{v_y(p)} \leqslant 0,$$

что эквивалентно неравенству (9), а значит, и неравенству (6). Отметим, что в силу равенства (5) и неравенств (6)

$$\delta_F(y) \leqslant \delta^*(y) \leqslant 1/2 \quad \text{при} \quad y < n/2 \quad \forall F \in \mathcal{F}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться в том, что независимо от четности числа n

$$R(\delta_F, 1/2) - R(\delta^*, 1/2) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left[\left(\delta_F(k) - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\delta^*(k) - \frac{1}{2} \right)^2 \right] C_n^k / 2^n,$$

где $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ — целая часть числа $\frac{n-1}{2}$, откуда имеем в силу неравенств (6)

$$\left(\delta_F(k) - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\delta^*(k) - \frac{1}{2} \right)^2 = (\delta_F(k) - \delta^*(k))\, (\delta_F(k) + \delta^*(k) - 1) \geqslant 0,$$

что и доказывает неравенство (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ольман В.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 33, № 3, 285—290 (1984).
2. *Вальд А.* Статистические решающие функции. — В кн.: Позиционные игры. М., «Наука», 1967, 300—522.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/X 1983