EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS
1984, 33, 3

УДК 519.262.2

В. ОЛЬМАН

ДОПУСТИМЫЕ И МИНИМАКСНАЯ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ БИНОМИАЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА АПРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрим задачу байесовского оценивания вероятности p по n независимым наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над биномиальной случайной величиной X, т. е. $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, при условии, что априорное распределение параметра p принадлежит фиксированному классу распределений. Аналогичная задача рассматривалась в [1, 2], где класс априорных распределений определялся ограничениями на моменты этих распределений, в то время как в настоящей статье эти ограничения накладываются на форму распределений.

Сформулируем рассматриваемую задачу. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ оценка случайного, независимого от X параметра p. Для квадратичной потери байесовский риск $r(f, F)$ имеет вид

$$r(f,F)=\int_0^1 E_p(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-p)^2\, dF(p),$$

где $F(p)$ — априорное распределение параметра p, про которое известно лишь то, что оно принадлежит заданному классу $\mathcal{F}$.

Определение 1. *Оценка δ называется $\mathcal{F}$-допустимой, если не существует оценки δ_0 такой, что*

$$r(\delta_0, G)\leqslant r(\delta, G) \qquad \forall\, G\in\mathcal{F}$$

и

$$r(\delta_0, G)\mathrel{\dot{<}} r(\delta, G)$$

хотя бы для одного $G\in\mathcal{F}$.

Определение 2. *Оценка δ^* называется $\mathcal{F}$-минимаксной, если*

$$\inf_{\delta}\sup_{G\in F} r(\delta, G)=\sup_{G\in F} r(\delta^*, G).$$

В настоящей статье решается задача описания $\mathcal{F}$-допустимых оценок и $\mathcal{F}$-минимаксной оценки в случае, когда $\mathcal{F}$ является классом распределений G таких, что

1) $G(p+0)+G(1-p)=1,\ 0\leqslant p\leqslant 1,$

2) $G(p)$ вогнута на интервале $(0, 1/2)$.

Обозначим через $B(\mathcal{F})$ класс байесовских оценок параметра относительно распределений из $\mathcal{F}$, т. е.

$$B(\mathcal{F})=\{\bar{\delta}/\exists\, F\in\mathcal{F}: \inf_{\delta} r(\delta, F)=r(\bar{\delta}, F)\}.$$

Т е о р е м а. *Класс $\mathcal{F}$-допустимых оценок совпадает с $B(\mathcal{F})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейство функций распределения $P_t(p)$, $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, определенных следующим образом:

$$P_t(p)=\begin{cases}0, & p\leqslant 0\\ \dfrac{p}{2t}, & 0<p\leqslant t\\ 1/2, & t<p\leqslant 1-t\\ \dfrac{p}{2t}+\left(1-\dfrac{1}{2t}\right), & 1-t<p\leqslant 1\\ 1, & p>1\end{cases}\qquad P_0(p)=\begin{cases}0, & p\leqslant 0\\ 1/2, & 0<p\leqslant 1\\ 1, & p>1.\end{cases}$$

Очевидно, что $P_t(p)\in\mathcal{F}$, $0\leqslant t\leqslant 1/2$.

Л е м м а 1. *Для того, чтобы $G\in\mathcal{F}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое вероятностное распределение μ, сосредоточенное на $[0, 1/2]$, что*

$$\int_0^1 u(x)\,dG(x)=\int_0^{1/2}\Big[\int_0^1 u(x)\,dP_t(x)\Big]d\mu(t) \tag{1}$$

для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $u(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. В силу свойств элементов класса для всякого $G(x)\in\mathcal{F}$ существует неотрицательная функция $g(x)$ со свойствами

1) $g(x)=g(1-x)$, $x\in(0,1)$,
2) $g(x)$ не возрастает при $x\in(0,1/2]$,
3) $g(x)$ непрерывна справа и слева при $x\in(0,1)$,
4) $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt+G(+0)$.

Определим меру $\mu(t)$ так, что

$$d\mu(0)=2dG(0),\quad d\mu(1/2)=g(1/2),\quad d\mu(t)=-2t\,dg(t),\quad 1/2>t>0. \tag{2}$$

Докажем, что определенная так мера является вероятностным распределением, т. е. $\int_0^{1/2} d\mu(t)=1$.

Имеем

$$\int_0^{1/2} d\mu(t)=d\mu(1/2)+d\mu(0)-\int_0^{1/2}2t\,dg(t).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{1/2} d\mu(t)=g(1/2)+2G(+0)-2tg(t)\Big|_0^{1/2}+2\int_{+0}^{1/2}g(t)\,dt=2G(1/2)+2\lim_{t\to 0}tg(t).$$

Существование $\lim_{t\to 0}tg(t)$ следует из правосторонней непрерывности функции $g(t)$. Пусть $\lim_{t\to 0}g(t)t=c>0$. Тогда для $0<\varepsilon<c$ существует такое δ, что $tg(t)>c-\varepsilon$ при $t\in(0,\delta)$, и следовательно,

$$\int_0^{\delta}g(t)\,dt>(c-\varepsilon)\int_0^{\delta}\frac{1}{t}\,dt=\infty,$$

что противоречит тому, что $\int_0^{\delta}g(t)\,dt=G(\delta)-G(+0)<\infty$. Таким образом, $\lim_{t\to 0} tg(t) = 0$, а $G(1/2) = 1/2$ в силу непрерывности $G(x)$ на $(0, 1)$, и окончательно $\int_0^{1/2} d\mu(t) = 1$.

Теперь докажем, что для выбранной меры μ имеет место равенство (1). Преобразуем правую часть (1):

$$\int_0^{1/2} \left(\int_0^1 u(x)\,dP_t(x)\right) d\mu(t) = \int_{+0}^{1/2-0} \int_0^1 u(x)\,dP_t(x)\,(-2t)\,dg(t) +$$
$$+ dG(0)\,[u(0)+u(1)] + g(1/2) \int_0^1 u(x)\,dx.$$

Далее, используя вид функции $P_t(x)$, получаем

$$\int_{+0}^{1/2-0} \left(\int_0^1 u(x)\,dP_t(x)\right)(-2t)\,dg(t) = -\int_{+0}^{1/2} \left(\int_0^t [u(x)+u(1-x)]\,dx\right) dg(t), \tag{3}$$

а интегрируя по частям, имеем

$$-\int_{+0}^{1/2-0} \left(\int_0^t [u(x)+u(1-x)]\,dx\right) dg(t) = -g(t) \int_0^t [u(x)+u(1-x)]\,dx \Big|_{+0}^{1/2-0} +$$
$$+ \int_0^{1/2+0} g(t)\,[u(t)+u(1-t)]\,dt. \tag{4}$$

Существование $\lim_{t\to 0} g(t) \int_0^t [u(x)+u(1-x)]\,dx$ следует из правосторонней непрерывности функции $g(t)$. Очевидно,

$$\left|g(t)\cdot \int_0^t (u(x)+u(1-x))\,dx\right| \leqslant tg(t)c_1, \text{ где } c_1 = \max_{x\leqslant t} |u(x)+u(1-x)|,$$

а, как доказано ранее, $\lim_{t\to 0} tg(t) = 0$, и следовательно, $\lim_{t\to +0} g(t)\cdot \int_0^t [u(x)+u(1-x)]\,dx = 0$. С учетом равенств (3) и (4) получаем

$$\int_0^{1/2} \left(\int_0^1 u(x)\,dP_t(x)\right) d\mu(t) =$$
$$= \int_0^{1/2} g(t)\,[u(t)+u(1-t)]\,dt + dG(0)\,(u(0)+u(1)) = \int_0^1 u(x)\,dG(x),$$

что и доказывает необходимость. Достаточность следует из того, что определенная с помощью равенств (2) функция распределения $G(t)$ на основе любого вероятностного распределения $\mu(t)$ принадлежит классу $\mathcal{F}$. Проверка этого факта не представляет трудности с учетом симметричного относительно точки 1/2 доопределения функции $g(t)$ на интервале $(1/2, 1]$.

Вернемся к доказательству теоремы. Очевидно, что если $\delta \in B(\mathcal{F})$, то δ является $\mathcal{F}$-допустимой процедурой, так как при выпуклой потере байесовская оценка единственна. Докажем теперь, что если $\delta_0 \notin B(\mathcal{F})$, то δ_0 не является $\mathcal{F}$-допустимой. Рассмотрим функцию $\tilde{r}(\delta, t) = r(\delta, P_t)$, $t \in [0, 1/2]$. Функцию $\tilde{r}(\delta, t)$ можно интерпретировать как функцию риска при оценивании параметра t. В силу теорем А. Вальда [3] классы допустимых и байесовских оценок параметра t при функции риска $\tilde{r}(\delta, t)$ совпадают. Таким образом, если U — класс всех вероятностных распределений на интервале $[0, 1]$, то δ' является допустимой для оценивания параметра t процедурой, если существует $\mu \in U$ такая, что

$$\int_0^{1/2} \tilde{r}(\delta', t)\, d\mu(t) = \inf_\delta \int_0^{1/2} \tilde{r}(\delta, t)\, d\mu(t). \tag{5}$$

В силу доказанной леммы любому элементу $\mu \in U$ соответствует распределение $F \in \mathcal{F}$ так, что

$$\int_0^{1/2} \tilde{r}(\delta, t)\, d\mu(t) = r(\delta, F). \tag{6}$$

Так как по предположению $\delta_0 \notin B(\mathcal{F})$, то

$$\inf_\delta r(\delta, F) < r(\delta_0, F) \qquad \forall F \in \mathcal{F},$$

откуда в силу равенств (5) и (6) получаем, что δ_0 — не байесовская процедура оценивания параметра t, а следовательно, и недопустимая. Таким образом, существует процедура δ_1 такая, что

$$\tilde{r}(\delta_1, t) \leqslant \tilde{r}(\delta_0, t) \qquad \forall t \in [0, 1/2], \tag{7}$$

и существует хотя бы одно $t \in [1/2]$, для которого это неравенство строгое. В силу неравенства (7) получаем

$$\int_0^{1/2} \tilde{r}(\delta_1, t)\, d\mu(t) \leqslant \int_0^{1/2} \tilde{r}(\delta_0, t)\, d\mu(t) \qquad \forall \mu \in U$$

или

$$r(\delta_1, F) \leqslant r(\delta_0, F) \qquad \forall F \in \mathcal{F},$$

причем существует хотя бы одно распределение $F \in \mathcal{F}$, для которого последнее неравенство строгое, а это и доказывает, что δ_0 не является $\mathcal{F}$-допустимой процедурой.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы сохраняет силу, если вероятностная структура наблюдений и функция риска удовлетворяют допущениям 5.1—5.5 из [3].

Теперь перейдем к определению $\mathcal{F}$-минимаксной процедуры, для чего понадобятся две леммы.

Л е м м а 2. *Пусть δ_F — байесовское решение относительно распределения $F \in \mathcal{F}$, т. е.*

$$\inf_\delta r(\delta, F) = r(\delta_F, F).$$

Тогда, если

$$\sup_{G \in \mathcal{F}} r(\delta_F, G) = r(\delta_F, F),$$

то δ_F является $\mathcal{F}$-минимаксной оценкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напишем очевидные неравенства

$$\sup_{G \in \mathcal{F}} \inf_\delta r(\delta, G) = \sup_{G \in \mathcal{F}} r(\delta_G, G) \geqslant r(\delta_F, F) =$$

$$= \sup_{G \in \mathcal{F}} r(\delta_F, G) \geqslant \inf_\delta \sup_{G \in \mathcal{F}} r(\delta, G).$$

Крайние члены выписанных отношений удовлетворяют и обратному неравенству, следовательно, везде стоит знак равенства, что и доказывает лемму.

Л е м м а 3. *Пусть функция $u(x) \geqslant 0$, $x \in (0, a)$, где a — фиксированное положительное число, и $u(x)$ — ограниченная неубывающая на $(0, a)$ функция. Определим класс функций $V_q(a)$, $q > 0$ следующим образом:*

$$V_q(a)=\{v(x):\ v(x)\geqslant 0,\ v(x)\ \textit{не возрастает на}\ (0,a),\ \int\limits_0^a v(x)\,dx=q\}.$$

Тогда

$$\sup_{v(x)\in V_q(a)} \int\limits_0^a u(x)\,v(x)\,dx=q/a\int\limits_0^a u(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $v_0(x)=q/a$, $0\leqslant x\leqslant a$. Очевидно, что $v_0(x)\in V_q(a)$. Для любой функции $v(x)\in V_q(a)$, не совпадающей почти всюду на $(0,a)$ с $v_0(x)$ существует точка $x_v\in(0,a)$ такая, что $v_0(x)-v(x)<0$ для $0\leqslant x\leqslant x_v$ и $v_0(x)-v(x)\geqslant 0$ для $x_v<x\leqslant a$.

Это следует из того факта, что $(v(x)-q/a)$ невозрастающая функция, а кроме того, $\int\limits_0^a v(x)\,dx=\int\limits_0^a v_0(x)\,dx$. Таким образом, имеем

$$\int\limits_0^a [v_0(x)-v(x)]\,u(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{x_v} [v_0(x)-v(x)]\,u(x)\,dx+\int\limits_{x_v}^a [v_0(x)-v(x)]\,u(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant x_v}(u(x)\cdot\int\limits_0^{x_v}[v_0(x)-v(x)]\,dx+\inf_{x_v\leqslant x\leqslant a}u(x)\int\limits_{x_v}^a[v_0(x)-v(x)]\,dx.$$

В силу неубывания $u(x)$ на $(0,a)$ получаем $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant x_v} u(x)=\inf\limits_{x_v\leqslant x\leqslant a} u(x)=$ $=u(x_v)$, и следовательно,

$$\int\limits_0^a [v_0(x)-v(x)]\,u(x)\,dx\geqslant u(x_v)\int\limits_0^a [v_0(x)-v(x)]\,dx=0,$$

что и доказывает лемму.

Теперь заметим, что $y=\sum\limits_{i=1}^n x_i$ — достаточная статистика, и следовательно, для оценивания параметра p имеет смысл пользоваться только функциями от y, т. е.

$$r(\delta,G)=\int\limits_0^1 E_p(\delta(y)-p)^2\,dG(p),$$

причем $P(y=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

Рассмотрим оценку $\delta_{1/2}(y)=\dfrac{y+1}{n+2}$, которая является байесовской относительно априорного распределения $P_{1/2}(p)$. Путем прямых вычислений легко получить

$$E_p(\delta_{1/2}(y)-p)^2=\sum_{k=0}^n\left(\frac{k+1}{n+2}-p\right)^2 C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\frac{p^2(4-n)+p(n-4)+1}{(n+2)^2}.$$

Пусть $n\geqslant 4$, тогда для $G\in\mathcal{F}$ имеем

$$r(\delta_{1/2},G)=2\int\limits_0^{1/2}\frac{p^2(4-n)+p(n-4)+1}{(n+2)^2}\,g(p)\,dp+dG(0)\cdot\frac{2}{(n+2)^2},$$

где $g(p)$ и $G(p)$ связаны соотношением $G(p)=\int_0^p g(t)\,dt+G(+0)$ (см. теорему), и $\int_0^{1/2} g(t)\,dt+G(+0)=1/2$. Используя лемму 3, получаем

$$r(\delta_{1/2}, G)\leqslant q\frac{n+20}{12(n+2)^2}+\left(\frac{1}{2}-q\right)\frac{2}{(n+2)^2}=\frac{n-4}{12(n+2)^2}q+\frac{2}{(n+2)^2},$$

где $q=\int_0^{1/2} g(p)\,dp\leqslant 1/2$. Очевидно, что

$$\max_{0\leqslant q\leqslant 1/2}\frac{n-4}{12(n+2)^2}q+\frac{2}{(n+2)^2}=\frac{n+44}{(n+2)^2},$$

и следовательно,

$$r(\delta_{1/2}; G)\leqslant\frac{n+44}{(n+2)^2}. \tag{8}$$

В неравенстве (8) в случае $G(p)=P_{1/2}(p)$ достигается равенство, откуда по лемме 2 получаем, что $\delta_{1/2}(y)$ — $\mathcal{F}$-минимаксная оценка.

Для случая $n<4$ решением является $\delta_0(y)=(y+\sqrt{n/2})/(n+\sqrt{n})$, т. е. байесовская оценка, соответствующая априорному распределению с плотностью $C[p(1-p)]^{\sqrt{n/2}-1}$ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skribinsky, M.* SIAM J. Appl. Math., **16**, № 1, 134—145 (1968).
2. *Skribinsky, M.* Ann. Math. Statist., **39**, № 2, 492—501 (1968).
3. *Вальд А.* Статистические решающие функции. — В кн.: Позиционные игры. М., «Наука», 1967, 300—522.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/VII 1983

V. OLMAN

BINOMIAALJAOTUSE PARAMEETRI LUBATAVAD JA BAYESI MINIMAKS-HINNANGUD KITSENDATUD APRIOORSE JAOTUSSEADUSE KORRAL

On vaadeldud binomiaaljaotuse parameetri Bayesi järgi hindamise ülesannet sõltumatute vaatluste korral tingimusel, et aprioorne jaotusseadus kuulub ühte fikseeritud jaotuse klassi. On tuletatud minimakshinnang ja kirjeldatud lubatavate hinnangute täielik klass.

V. OLMAN

ADMISSIBLE AND MINIMAX ESTIMATORS OF THE BINOMIAL PROBABILITY UNDER RESTRICTIONS ON A PRIORI DISTRIBUTION

The problem of Bayes estimation of the Binomial probability is considered under a condition that an a priori distribution belongs to a fixed class $\mathcal{F}$. Concepts of $\mathcal{F}$-admissibility and $\mathcal{F}$-minimaxity are introduced. The class of all $\mathcal{F}$-admissible estimators, where F consists of distributions F such that $F(p)+F(1-p)=1$, $0\leqslant p\leqslant 1$, an $F(p)$ is convex on [1/2, 1), is described. It is shown that the estimator δ which is Bayes with respect to the uniform distribution on [0 1], is $\mathcal{F}$-minimax.