

А. ФОМИН

## К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ

(Представил Х. Абен)

Метод интегральной фотоупругости [1] позволяет определять объемное напряженное состояние в фотоупругих моделях или прозрачных изделиях при их сквозном просвечивании. Несомненные преимущества этого метода привлекают внимание многих исследователей, особенно в такой важной области, как определение остаточных напряжений в стеклянных и пластмассовых изделиях, искусственно выращиваемых кристаллах. Однако в настоящее время интерпретация наблюдаемых оптических явлений, возникающих при сквозном просвечивании фотоупругих сред, относится к сравнительно простым случаям напряженного состояния на световом луче, и не существует общего подхода к решению обратной задачи интегральной фотоупругости, независимого от специфики конкретной задачи.

Обратная задача интегральной фотоупругости, заключающаяся в восстановлении параметров напряженного состояния по ходу светового луча на основе экспериментальных данных оптических измерений, является некорректно поставленной задачей. Новые возможности для решения рассматриваемой задачи дает принцип регуляризации [2].

В настоящей работе дается корректная постановка обратной задачи интегральной фотоупругости и предлагается общий подход к решению ее для унитарных фотоупругих сред.

1. Рассмотрим неоднородную фотоупругую среду, в которой компоненты падающего светового вектора вдоль луча просвечивания преобразуются при помощи унитарной унимодулярной матрицы. Известно, что в этом случае существуют два перпендикулярных друг другу направления падающего линейно поляризованного света, при которых выходящий из среды свет также поляризован линейно. Направления падающего и выходящего света, обладающие упомянутым свойством, называются соответственно первичными и вторичными характеристическими направлениями, а углы, образуемые этими направлениями с осями координатной системы, — первичным ( $\alpha_0$ ) и вторичным ( $\alpha_*$ ) характеристическими углами. Между компонентами выходящего светового вектора возникает разность фаз ( $2\gamma$ ), называемая характеристической. Характеристические величины ( $\alpha_0$ ,  $\alpha_*$ ,  $2\gamma$ ) на световом луче (ось  $z$ ) зависят от распределения разности квазиглавных напряжений  $\varphi_1(z) = \sigma_1 - \sigma_2$  и их направлений (азимута  $\varphi_2(z)$ ) между точками входа и выхода. При известных  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$ , а также крайних значениях характеристических величин, последние могут быть найдены из решения следующей системы дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_*}{dz} &= \frac{\pi}{\lambda} C_{\sigma\varphi_1}(z) \operatorname{ctg} 2\gamma \sin 2(\varphi_2(z) - \alpha_*), \\ \frac{d\gamma}{dz} &= \frac{\pi}{\lambda} C_{\sigma\varphi_1}(z) \cos 2(\varphi_2(z) - \alpha_*), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{da_0}{dz} = \frac{\pi}{\lambda} C_{\sigma\varphi_1}(z) \frac{1}{\sin 2\gamma} \sin 2(\varphi_2(z) - \alpha_*),$$

где  $C_{\sigma}$  — коэффициент оптической чувствительности материала фотоупругой среды по напряжениям,  $\lambda$  — длина падающей монохроматической световой волны.

Характеристические величины для заданных среды и напряженного состояния в случае, когда имеет место вращение квазиглавных направлений, однозначно определяются как функции длины падающей волны света. Вводя обозначения  $G_1 = \alpha_0$ ,  $G_2 = \alpha_*$ ,  $G_3 = 2\gamma$ , оптическую анизотропию неоднородной фотоупругой среды можно охарактеризовать тремя функциями  $G_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Рассматриваемая здесь задача является обратной по отношению к (1) и состоит в том, чтобы по известным из эксперимента  $G_i(\lambda)$  определить функции  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$ . Такая постановка задачи является некорректной в связи с тем, что малые изменения параметров напряженного состояния приводят к большим изменениям характеристических величин. Для решения рассматриваемой задачи необходимо использовать методы, основанные на принципе регуляризации [2], привлекая априорную информацию об искомом решении и величинах погрешностей экспериментально определяемых оптических величин.

2 Пусть  $G_i(\lambda)$  — характеристические величины, заданные в интервале длин волн  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , или на некоторой выбранной сетке значений  $\{\lambda_k\}$   $k = 1, 2, \dots, 2N, \dots$ , отвечающей экспериментальному набору. В случае непрерывного спектра будем считать, что функции  $G_i(\lambda)$  принадлежат пространству  $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$ . Прямая задача (1) сопоставляет любым функциям  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  некоторые функции  $G_i(\lambda)$ , определяя тем самым нелинейные операторы  $T_i$ :

$$T_i(\varphi_1(z), \varphi_2(z), \lambda) \equiv G_i(\lambda), \quad i = 1, 2, 3.$$

Задачу о восстановлении параметров напряженного состояния по ходу светового луча при точных значениях характеристических величин можно было бы поставить как задачу о минимизации функционалов

$$\Phi_i[\varphi_n(z)] = \|T_i(\varphi_n(z), \lambda) - G_i(\lambda)\|_{L_2}^2, \quad n = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3$$

в случае непрерывного спектра, или как задачу о минимизации функционалов

$$F_i[\varphi_n(z)] = \sum_{k=1}^{2N} \{T_i(\varphi_n(z), \lambda_k) - G_i(\lambda_k)\}^2, \quad i = 1, 2, 3$$

в случае дискретного набора длин волн. Однако эти задачи являются неустойчивыми относительно малых возмущений характеристических величин таких, что  $\|G_i(\lambda) - \bar{G}_i(\lambda)\| \leq \delta_i^2$ , где  $\bar{G}_i(\lambda)$  — приближенные значения характеристических величин и  $\delta_i$  — погрешности, вносимые измерительными средствами. В результате минимизирующие алгоритмы, отвечающие условию  $\Phi_i[\varphi_n(z)] \leq \delta_i^2$  (или  $F_i[\varphi_n(z)] \leq \delta_i^2$ ) могут давать приближенные решения  $\varphi_n^\delta(z)$ , сколь угодно далекие от точного.

Принцип регуляризации [2] позволяет свести неустойчивые задачи минимизации выше рассмотренных функционалов к задачам устойчивым путем введения стабилизирующего функционала, выбор которого определяется физическим содержанием задачи и априорной информацией о свойствах искомого решения. В случае исследования фотоупругих моделей, в которых причиной появления напряжений является система внешних сил, напряженное состояние в объеме модели соответствует решению некоторой задачи линейной теории упругости. Распределение разности квазиглавных напряжений и их направлений по лучу просве-

чивания в этом случае в силу хорошо известных аналитических свойств решений задач теории упругости принадлежат (по крайней мере) классу  $C^2$ , т. е. являются функциями непрерывными вместе со своими первыми и вторыми производными. В случае остаточных напряжений, когда причиной появления последних является не внешняя нагрузка, а некоторая система несовместных начальных деформаций, мы всегда будем предполагать, что распределения напряжений и поворотов квазиглавных площадок по исследуемому лучу обладают той же степенью гладкости, что и в предыдущем случае. Таким образом, качественная априорная информация об области значений искомого решения и его производных определяет для рассматриваемой задачи множество корректности [2] и стабилизирующий функционал в рассматриваемом случае может быть выбран в следующем виде

$$\Omega[\varphi_n(z)] = \sum_{n=1}^2 \int_0^H \left[ k_n(z) (\varphi_n(z) - \psi_n(z))^2 + \sum_{i=1}^3 l_i(z) \left( \frac{d^i \varphi_n(z)}{dz^i} - \frac{d^i \psi_n(z)}{dz^i} \right)^2 \right] dz,$$

где  $k_n(z)$ ,  $l_i(z)$  — положительные непрерывные весовые функции, а  $\psi_n(z)$  — заданные априори некоторые распределения разности квазиглавных напряжений и их поворотов, в окрестности которых находится искомое решение. Введенный стабилизатор определяет норму в пространстве Соболева  $W_2^3$ , что обеспечивает компактность его в метрике  $C^2$  [3]. Кроме того,  $\Omega[\varphi_n(z)] \geq 0$  при всех  $\varphi_n(z) \in W_2^3$  и априори известно, что существует элемент  $\varphi_n^*(z) \in W_2^3$ , минимизирующий функционалы  $\Phi_i$  (или  $F_i$ ) в  $C^2$ . Следовательно,  $\Omega[\varphi_n(z)]$  отвечает всем требованиям, предъявляемым к стабилизирующим функционалам в методе регуляризации [3]. Заметим, что задача о минимуме  $\Omega[\varphi_n(z)]$  отвечает требованию наименьшего отклонения искомого решения  $\varphi_n(z)$  от заданных из каких-либо предварительных соображений функций  $\psi_n(z)$ , а также требованию необходимой гладкости  $\varphi_n(z)$  на  $[0, H]$ .

Следуя принципу регуляризации, некорректная задача минимизации функционалов  $\Phi_i$  (или  $F_i$ ) сводится к корректной задаче минимизации сглаживающих параметрических функционалов

$$M_i^\alpha[\varphi_n(z)] = \|T_i(\varphi_n(z), \lambda) - \bar{G}_i(\lambda)\|_{L_2}^2 + \alpha \Omega[\varphi_n(z)], \quad (2)$$

в которых параметр регуляризации  $\alpha > 0$  выбирается из условия

$$\|T_i(\varphi_n(z), \lambda) - \bar{G}_i(\lambda)\|_{L_2}^2 = \delta_i^2.$$

Задача минимизации  $M_i^\alpha[\varphi_n(z)]$  при любом  $\alpha > 0$  является устойчивой [2], и для ее решения может быть использован любой алгоритм минимизации. Найденное решение будет наименее отклоняться от  $\psi_n(z)$  и удовлетворять требованию  $\|T_i(\varphi_n(z), \lambda) - \bar{G}_i(\lambda)\|_{L_2} \leq \delta_i$ . Таким образом, задача восстановления параметров напряженного состояния фотоупругой среды на световом луче есть задача определения коэффициентов  $\varphi_n(z)$  системы уравнений (1) по известным функционалам  $G_i(\lambda)$  от решения этой системы, и ее корректная постановка сводится к минимизации параметрических функционалов (2).

3. При численном решении, реализуемом на ЭВМ, производится конечно-разностная аппроксимация операторов  $T_i$  для выбранного направления просвечивания. Для этого функции  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  непрерывного аргумента  $z \in [0, H]$ , соответствующие разности квазиглавных напряжений и их поворотов, заменяются сеточными функциями  $\varphi_j^{(1)}$  и  $\varphi_j^{(2)}$  ( $j = \overline{1, N}$ ). Таким образом, фотоупругая среда описывается  $2N$ -мер-

ным вектором  $g = \{\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_N^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_N^{(2)}\}$ , любому значению которого операторы  $T_i(g, \lambda)$  сопоставляют функции  $G_i(\lambda)$  или некоторый дискретный ряд значений  $G_i(\lambda_k)$ , соответствующих выбранным значениям длин волн  $\lambda_k$ , для которых производятся измерения.

В практике численного решения рассматриваемой задачи удобным является отождествление величин  $G_i(\lambda)$  не с самими характеристическими величинами, а со следующими функциями от них:

$$G_1(\lambda) = \operatorname{tg} 2\alpha_0, \quad G_2(\lambda) = \operatorname{tg} 2\alpha_*, \quad G_3(\lambda) = \cos 2\gamma.$$

В этом случае конечно-разностные операторы  $T_i(g, \lambda)$  имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} T_1(g, \lambda) &\equiv G_1(\lambda) = (ps + qr) / (pq - rs), \\ T_2(g, \lambda) &\equiv G_2(\lambda) = (ps - qr) / (pq + rs), \\ T_3(g, \lambda) &\equiv G_3(\lambda) = p^2 + r^2 - q^2 - s^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p, q, r, s$  — элементы полной унитарной унимодулярной матрицы  $\hat{V}(g)$ , имеющей вид

$$\hat{V}(g) = \left\| \begin{array}{cc} p+iq & r+is \\ -r+is & p-iq \end{array} \right\| = \prod_{j=N}^1 \hat{V}(g_j),$$

где

$$\hat{V}(g_j) = \left\| \begin{array}{cc} \cos n_j \varphi_j^{(1)} + i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \cos 2\varphi_j^{(2)} & i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \sin 2\varphi_j^{(2)} \\ i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \sin 2\varphi_j^{(2)} & \cos n_j \varphi_j^{(1)} - i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \cos 2\varphi_j^{(2)} \end{array} \right\|,$$

$n_j = \frac{\pi t_j}{\lambda} C_\sigma$ ,  $t_j$  — шаг дискретизации.

Представление операторов  $T_i(g, \lambda)$  в форме (3) вносит обычную в таких случаях погрешность, вызываемую дискретным представлением входящих в операторы функций. Выбор дискретизации определяется априорными данными о характере напряженного состояния и всегда позволяет свести погрешность конечно-разностных операторов к величинам значительно меньшим, чем величины погрешностей  $G_i(\lambda)$ , получаемых с помощью измерительных средств.

Для минимизации функционалов нам потребуются операторные производные  $T'_i(g, \lambda)$ , для которых могут быть получены аналитические выражения. Представим операторы  $T_i(g, \lambda)$  в виде  $T_i(g, \lambda) = A_i(\hat{V}(g))$ , где  $A_i$  — операторы, отображающие матрицу  $\hat{V}(g)$  в функции  $G_i(\lambda)$ . Тогда производные операторов будут равны [4]

$$T'_i(g, \lambda) = A'_i[\hat{V}(g)]\hat{V}'(g).$$

Частная производная матрицы  $\hat{V}(g)$  по  $\varphi_j^{(1)}$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \hat{V}_j^{(1)}(g) &= \frac{\partial}{\partial \varphi_j^{(1)}} [\hat{V}(g)] = -n_j \prod_{k=N}^{j+1} \hat{V}(g_k) \times \\ &\times \left\| \begin{array}{cc} \sin n_j \varphi_j^{(1)} - i \cos n_j \varphi_j^{(1)} \cos 2\varphi_j^{(2)} & -i \cos n_j \varphi_j^{(1)} \sin 2\varphi_j^{(2)} \\ -i \cos n_j \varphi_j^{(1)} \sin 2\varphi_j^{(2)} & \sin n_j \varphi_j^{(1)} + i \cos n_j \varphi_j^{(1)} \cos 2\varphi_j^{(2)} \end{array} \right\| \times \\ &\times \prod_{k=j-1}^1 \hat{V}(g_k), \end{aligned}$$

а частная производная по  $\varphi_j^{(2)}$  следующий вид

$$\hat{V}_j^{(2)}(g) = \frac{\partial}{\partial \varphi_j^{(2)}} [\hat{V}(g)] = -2 \prod_{k=N}^{j+1} \hat{V}(g_k) \times \\ \times \left\| \begin{array}{cc} i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \sin 2\varphi_j^{(2)} & -i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \cos 2\varphi_j^{(2)} \\ -i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \cos 2\varphi_j^{(2)} & -i \sin n_j \varphi_j^{(1)} \sin 2\varphi_j^{(2)} \end{array} \right\| \times \prod_{k=j-1}^1 \hat{V}(g_k).$$

Из (3) можно получить производные операторов  $T_i(g, \lambda)$ . Производная оператора, соответствующая первичному характеристическому направлению, взятая при значении  $\hat{V}(g)$  и примененная к матрице

$$\hat{M} = \left\| \begin{array}{cc} m_1 + im_2 & m_3 + im_4 \\ -m_3 + im_4 & m_1 - im_2 \end{array} \right\|,$$

будет иметь вид

$$T'_1[\hat{V}(g)]\hat{M} = \frac{1}{(pq - rs)^2} [(q^2 + s^2)(pm_3 - rm_1) + (p^2 + r^2)(qm_4 - sm_2)].$$

Для вторичного характеристического направления —

$$T'_2[\hat{V}(g)]\hat{M} = \frac{1}{(pq + rs)^2} [(q^2 + s^2)(rm_1 - pm_3) + (p^2 + r^2)(qm_4 - sm_2)]$$

и характеристической разности фаз —

$$T'_3[\hat{V}(g)]\hat{M} = 2[pm_4 + rm_3 - qm_2 - sm_4].$$

Имея операторные производные, градиент первого члена функционала, представляющий собой  $2N$ -мерный вектор, например для  $i = 1$ , получим в следующем виде

$$x_j = -2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\mu(\lambda)}{(pq - rs)^2} [(q^2 + s^2)(pv_3^{j,1} - rv_1^{j,1}) + (p^2 + r^2)(qv_4^{j,1} - sv_2^{j,1})] d\lambda,$$

$$x_{j+N} = -2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\mu(\lambda)}{(pq - rs)^2} [(q^2 + s^2)(pv_3^{j,2} - rv_1^{j,2}) + (p^2 + r^2)(qv_4^{j,2} - sv_2^{j,2})] d\lambda,$$

где  $\mu(\lambda) = T_1(g, \lambda) - \bar{G}_1(\lambda)$ , а  $v_i^{j,1}$  и  $v_i^{j,2}$  — соответственно элементы матриц  $\hat{V}_j^{(1)}$  и  $\hat{V}_j^{(2)}$ .

Таким образом, градиент функционала (2) при  $i = 1$  будет представлять собой  $2N$ -мерный вектор с координатами

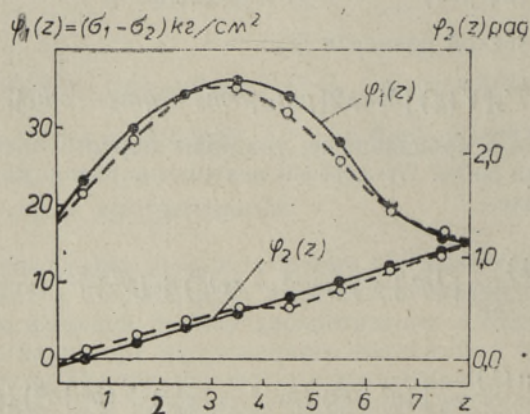
$$[M\alpha_j[g]]'_j = x_j + \alpha \Omega'_j[g], \quad j = 1, 2, \dots, 2N,$$

в котором производные стабилизатора определяются вполне элементарно. При других значениях  $i$  градиенты функционалов получаются аналогичным образом.

4. Проведенные расчеты и анализ показали, что все три функционала (2), использующие представление (3), имеют большое количество локальных минимумов. Глобальный минимум лежит в «узком глубоком овраге» с большим градиентом своих склонов. Элемент, на котором достигается глобальный минимум, является в нашем случае решением задачи. В соответствии с многоэкстремальной структурой функционалов в области поиска, которая задавалась параллелепипедными ограниче-

ниями, производился просмотр их значений в точках, соответствующих точкам ЛП<sub>т</sub> — последовательности для  $2N$ -мерного куба [5]. Метод ЛП-поиска является детерминированным аналогом метода Монте-Карло и характеризуется существенно меньшим количеством испытаний по сравнению с другими методами при нахождении оптимальных точек. Затем координаты точек, соответствующих ряду наименьших значений функционалов, использовались как случайные начальные приближения для поиска в их окрестности минимума. Необходимо отметить, что просмотр области поиска с помощью ЛП<sub>т</sub>-последовательности проводился для функционалов без стабилизатора, в то время как минимизация проводилась для сглаживающих параметрических функционалов. Численная реализация минимизации производилась с использованием диалоговой системы, включающей в себя несколько десятков методов и позволяющей как в диалоговом, так и в пакетном режиме, в зависимости от ситуации, менять стратегию поиска минимума [6, 7].

Рассматривались различные виды напряженных состояний фотоупругих сред и соответствующих им конечно-разностных аппроксимаций. Для каждого случая проводился прямой расчет характеристических величин  $G_i(\lambda_k)$  по формулам (3) для ряда значений  $\lambda_k$  при  $k \geq 2N$ . По этим данным в соответствии с изложенным алгоритмом производилось восстановление параметров напряженного состояния. Никаких априорных данных о величинах разностей квазиглавных напряжений и их поворотов при решении задачи не предполагалось.



На рисунке представлены результаты численного эксперимента для одного из рассмотренных случаев. Исходное напряженное состояние фотоупругой среды по ходу светового луча соответствовало функциям  $\varphi_n(z)$ , изображенным на рисунке сплошными линиями. Коэффициент оптической чувствительности материала по напряжениям был равен  $S_\sigma = 50 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{кг}$  (эпоксидная смола). Дискретный аналог среды соответствовал  $t_j = 1 \text{ см}$  и  $j = 1,8$ . В таблице приведены величины  $G_1(\lambda_k) = \text{tg } 2\sigma_\sigma$ , соответствующие значениям  $\varphi_j^{(n)}$  (черные кружки на рисунке), для различных волн при двух типах случайных возмущений. Среднеквадратичные погрешности были соответственно равны  $\delta_1 = 0,036$  и  $\delta_1 = 0,408$ . Возмущения генерировались на ЭВМ и отвечали относительным случайным ошибкам с нормальным законом распределения.

В большинстве случаев практические требования, предъявляемые к процедуре нахождения приближенного решения, ограничиваются требованием равномерной сходимости лишь самих последовательностей регуляризованных решений к точному при стремлении погрешностей входных данных к нулю. Требования, предъявляемые к сходимости про-

$\lambda$ , нм	$G_1(\lambda)$		
	$\delta_1 = 0,0$	$\delta_1 = 0,036$	$\delta_1 = 0,408$
400	0,4375	0,4372	0,4438
410	-0,8939	-0,9029	-0,9393
420	0,6874	-0,6940	-0,6882
430	-0,1045	-0,1030	-0,1017
440	1,7644	1,7544	1,8860
450	0,9171	0,8997	0,8902
460	3,7085	3,6180	3,7388
470	1,9853	1,9624	1,9448
480	5,5834	5,6976	5,8873
490	0,9012	0,9021	0,9207
500	-2,2742	-2,2736	-2,1018
510	-0,4503	-0,4399	-0,4558
520	0,5031	0,5035	0,5092
530	0,2656	0,2675	0,2567
540	26,2844	26,1698	25,7727
550	1,3499	1,3661	1,3156
560	0,5158	0,5200	0,4985
570	-0,5382	-0,5378	-0,5604
580	0,7441	0,7325	0,7841
590	-1,4093	-1,3999	-1,4124

изводных решения более слабые и обычно в практике исследований напряжений достаточна их сходимость в метрике  $L_2$ . Поэтому в приводимом примере конечно-разностный аналог стабилизирующего функционала был взят в виде, использующем лишь первые производные функций  $\varphi_n(z)$ , что обеспечивало его компактность в метрике  $C(\varphi_n(z) \in W_2^1)$ . Весовые функции в расчете принимались  $k_n(z) = l_i(z) = 1$ ; функции  $\psi_n(z) = 0$ , что соответствовало поиску  $\Omega$ -нормального решения рассматриваемой задачи [3].

Область поиска для разности квазиглавных напряжений ограничивалась следующими пределами:  $5 \leq \varphi_j^{(1)} \leq 40$  кг/см<sup>2</sup>, а для их вращений —  $0,2 \leq \varphi_j^{(2)} \leq 1,5$  рад. Вычисление значений функционала  $F_1[\varphi_j^{(n)}]$  в точках ЛП<sub>τ</sub>-последовательности при  $2N=16$  осуществляется на ЭВМ БЭСМ-6 приблизительно со скоростью 1500 точек (значений) в минуту, что позволяет достаточно эффективно обнаружить наиболее вероятные начальные приближения в окрестности искомого решения. Расчеты проводились для ряда значений параметра регуляризации  $\alpha_p < \alpha_{p-1}$ ,  $p=1, 2, \dots$ , и из последовательности экстремалей выбиралось приближенное решение  $\varphi_{j,\alpha}^{(n)}$  по критерию невязки  $F_1[\varphi_{j,\alpha}^{(n)}] \leq \delta_1^2$ .

На рисунке светлые кружки соответствуют восстановленным параметрам напряженного состояния при погрешности исходных данных  $\delta_1 = 0,408$  (см. таблицу). Результаты восстановления напряженного состояния при  $\delta_1 = 0,036$  не приведены ввиду их малого отличия от изображенных на рисунке. Полученные данные показывают, что искомое решение восстанавливается с удовлетворительной точностью и устойчиво относительно малых возмущений исходных данных.

5. Использование сквозного просвечивания трехмерных моделей или изделий и интерпретация интегральных оптических явлений на основе современных методов решения некорректных задач позволяют получать объективные результаты и оценивать степень достоверности этих результатов. В отличие от таких методов решения обратных некорректных задач, как методы параметризации, последовательных приближений, фильтрации спектра решения, которые не гарантируют сходимости приближенных решений к точному, и обычно «работают» тем хуже, чем выше точность исходных данных, современные методы регуляризации, использующие качественную априорную информацию о гладкости

точного решения и величине погрешности, гарантируют сходимость регуляризованных приближений к точному решению.

Изложенный в этой работе подход к решению обратной задачи интегральной фотоупругости является вполне общим и не зависящим от вида напряженного состояния по ходу светового луча. Этот подход может быть распространен и на метод магнитофотоупругости [1], который применяется в случае отсутствия вращения квазиглавных направлений с вполне очевидными изменениями в структуре используемых функционалов. Необходимо также отметить, что существует полная аналогия между методом фотоупругости и методом акустоупругости, использующем акустическое двупреломление поляризованных ультразвуковых волн [1], и следовательно, изложенный подход полностью применим и к решению обратной задачи интегральной акустоупругости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. Таллин, «Валгус», 1975.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1979.
3. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М., «Наука», 1981.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
5. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М., «Наука», 1981.
6. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., «Наука», 1982.
7. Веселов Е. Н., Мазурик В. П. Диалоговая система оптимизации (инструкция пользователю). Сообщение по программному обеспечению ЭВМ. М., ВЦ АН СССР, 1980.

*Институт машиноведения  
Академии наук СССР*

Поступила в редакцию  
29/III 1983

A. FOMIN

#### INTEGRAALSE FOTOELASTSUSE PÕRDULESANDE LAHENDAMISEST

Integraalne fotoelastsus võimaldab määrata kolmemõõtmelist pingelolukorda fotoelastsetes mudelites ja teistes läbipaistvates kehades, kui viimaseid läbi valgustada polariseeritud valgusega. Seejuures tekkivaid optilisi nähtusi on seni piisavalt täielikult interpreteeritud vaid valguskiire suhteliselt lihtsate pingeaotuste puhul. Üldine integraalse fotoelastsuse pöördülesande lahendamise meetod, mis ei sõltuks ülesande spetsiifikast, seni puudub.

Artiklis on esitatud integraalse fotoelastsuse (ka magnetofotoelastsuse ja akustoeelastsuse) pöördülesande korrektne formuleering ning lahendusviis unitaarse fotoelastse keskkonna puhul. Esitatud meetodit on illustreeritud numbrilise näitega.

A. FOMIN

#### ON THE SOLVING OF INTEGRATED PHOTOELASTICITY REVERSE PROBLEMS

The integrated photoelasticity method allows to determine a three-dimensional state of stress in the photoelastic models or other transparent bodies when polarized light passes through them. However, an interpretation of optical phenomena that occur when polarized light passes through photoelastic media is related to the comparatively simple cases of the stress state on a light beam; there is no general way of obtaining a solution of the integrated photoelasticity reverse problem independent of the character of the specific problem.

In this paper, the correct statement of integrated photoelasticity (magnetophotoelasticity, acoustoelasticity) reverse problem is given, and the common approach to the solution of this problem for unitar photoelastic media is proposed. The numerical example of the application of the proposed approach is presented.