EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS
1984, 33, 3

УДК 517.983.54

У. ХЯМАРИК

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представил А. Хумал)

Исследуется регуляризация некорректных задач, дискретизированных проекционными методами. Даются условия, при которых размерность спроектированного уравнения является равноправным параметром регуляризации. Указаны правила выбора размерности и параметра регуляризации для получения регуляризующего алгоритма, а также для оптимальной точности его по порядку.

1. Введение

При решении некорректных задач применимы многие методы регуляризации [1–6]. Для реализации их на ЭВМ необходима дискретизация до или после регуляризации. Интерес представляет проблема выбора размерности n в проекционном методе или шага h в конечно-разностных методах.

Один подход к этому вопросу заключается в трактовке ошибок дискретизации как дополнительных возмущений оператора и правой части уравнения. Порядок регуляризации сохраняется при достаточно высоком n или малом h. Так, в [7] исследован выбор шага h при решении методом конечных элементов уравнения, регуляризованного методом Тихонова. Использование проекционного метода Галеркина для уравнения, регуляризованного методом Лаврентьева, исследовано в [8]. Дискретизация уравнения проекционным методом наименьших квадратов и регуляризация ее затем методом Тихонова исследована в [9, 10], а также в [2] (гл. 6, § 6), эквивалентный алгоритм приведен в [11–13]. Выбор размерности при решении спроектированного уравнения методом Тихонова или итераций проанализирован в [14].

Другой подход возможен в случаях, когда решение дискретизированного первоначального уравнения сходится при $n\to\infty$ $(h\to 0)$ к (нормальному) решению этого уравнения, если оператор и правая часть уравнения заданы точно. Такая сходимость для проекционных методов исследована в [9] (теоремы (11)—(13)) и [15–23], а для других методов в [6, 24, 25] (см. и ссылки в них). Если в этом случае оператор и правая часть заданы неточно, то при правильном согласовании n или h с уровнями погрешностей получается регуляризующий алгоритм с параметром регуляризации n или h (иногда тогда говорят о саморегуляризации). В случае дополнительной регуляризации уравнения до или после дискретизации можно говорить о двухпараметрической регуляризации (см. [26]).

В [23] установлены условия саморегуляризации при использовании некоторых проекционных методов. В настоящей работе исследуется выбор параметров при регуляризации соответствующих спроектированных уравнений любым методом из класса, выделенного в [5] и включающего методы Тихонова, Лаврентьева, итерационные методы и прочие. С учетом эквивалентности некоторых методов (см. раздел 4) результаты разделов 3 и 4 используемы и при дискретизации регуляризованных уравнений.

2. Задача и метод ее решения

Пусть H и F — гильбертовы пространства и $A \in L(H, F)$ — вполне непрерывный оператор; нулевое пространство $N(A)$ в общем нетривиально. Рассмотрим уравнение

$$Au = f. \tag{1}$$

Введем ортопроекторы $P : H \to \overline{R(A^*)}$, $Q : F \to \overline{R(A)}$. Здесь $R(A)$ — область значений оператора A, $A^* \in L(F, H)$ — сопряженный с A оператор. Предполагаем, что $f \in R(A)$. Пусть вместо f и A известны приближения $f_\delta \in F$ и $A_\eta \in L(H, F)$ такие, что $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$.

Опишем двухпараметрическую регуляризацию уравнения (1).

На первом этапе регуляризации используем проекционные методы [27]. Выбирая n-мерные подпространства $H_n \subset H$ и $F_n \subset F$ с соответствующими ортопроекторами P_n и Q_n, получим спроектированное уравнение $Q_n A_\eta P_n u_n = Q_n f_\delta$ с искомым решением $u_n \in H_n$.

На втором этапе регуляризации используем однопараметрическое семейство вещественнозначных функций $\{g_\alpha\}$, $\alpha > 0$ (см. [5]), определенных и измеримых на некотором отрезке $[0, \lambda_0]$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0} |g_\alpha(\lambda)| \leqslant C\alpha^{-1} \qquad (\alpha > 0), \tag{2}$$

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0} \lambda^p |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \leqslant C\alpha^p \qquad (0 \leqslant p \leqslant p_0,\ p_0 > 0). \tag{3}$$

Буквой C здесь и в дальнейшем обозначим независящие от α, n, δ и η постоянные, значения которых в разных местах в общем разные.

В случае $F = H$, $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$, $F_n = H_n$ в качестве приближенного решения уравнения (1) примем элемент

$$u_{n,\alpha} = (I - A_{\eta,n} g_\alpha(A_{\eta,n})) P_n u_0 + g_\alpha(A_{\eta,n}) P_n f_\delta, \qquad A_{\eta,n} = P_n A_\eta P_n, \tag{4}$$

предполагая $\|A_{\eta,n}\| \leqslant \lambda_0$.

В случае несамосопряженной задачи (1) приближенное решение имеет вид

$$u_{n,\alpha} = (I - B_{\eta,n} g_\alpha(B_{\eta,n})) P_n u_0 + g_\alpha(B_{\eta,n}) A_{\eta,n}^* f_\delta, \tag{5}$$

$$A_{\eta,n} = Q_n A_\eta P_n, \qquad B_{\eta,n} = A_{\eta,n}^* A_{\eta,n} = P_n A_\eta^* Q_n A_\eta P_n.$$

Мы предполагали, что $\|B_{\eta,n}\| \leqslant \lambda_0$.

Здесь u_0 любое начальное приближение с условием $u_0 \in \overline{R(A^*)}$; можно, в частности, положить $u_0 = 0$.

Отметим, что условие (3) в методе Тихонова и Лаврентьева выполнено с $p_0 = 1$, в явной и неявной итерационной схеме с $p_0 = \infty$ (см. [5]).

3. Выбор параметров

Обозначим через u_* решение уравнения (1), ближайшее к u_0. Ошибку $e_{n,\alpha} = \|u_{n,\alpha} - u_*\|$ оцениваем на классе

$$u_0 - u_* = |A|^p v, \quad u_0 = |A|^p w; \quad p > 0; \quad v, w \in H, \quad \|v\| \leqslant \varrho, \quad \|w\| \leqslant \varrho, \tag{6}$$

где $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

Замечание 1. Требование о представимости u_0 в виде $u_0 = |A|^p w$ второстепенное, так как при $u_0 \neq 0$ с заменой переменных $\bar{u} = u_* - u_0$ в уравнении (1) приходим к задаче $A\bar{u} = f - Au_0$, где начальному приближению u_0 соответствует $\bar{u}_0 = 0$.

Известно ([2, 5]), что оптимальной по порядку оценкой на классе (6) является

$$e_{n,\alpha} \leqslant C\Delta^{p/(p+1)}, \qquad \Delta = \max\{\delta, \eta\}. \tag{7}$$

Обозначим $h = h(n) = \|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n\|^{-1}$. В дальнейшем будут использованы условия вида

$$\|(I - P_n)|A|^p\| \leqslant Ch^p \quad (0 \leqslant p \leqslant p_1), \tag{8}$$

$$\|(I - Q_n)|A^*|^p\| \leqslant Ch^p \quad (0 \leqslant p \leqslant p_2). \tag{9}$$

Обозначим $a \asymp b$, если $a = O(b)$ и $b = O(a)$.

Теорема 1. *Пусть $F = H$, $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$ и уравнение (1) проектируется методом Галеркина (т. е. $F_n = H_n$; тогда (см. [23]) $h = \inf\{(Au_n, u_n)/\|u_n\|^2,\ u_n \in H_n\}$). Пусть $H_n \cap N(A) = 0$, $P_n u \to u$ при $n \to \infty$ $\forall u \in \overline{R(A^*)}$. Предполагаем, что выполнено условие (8) с $p_1 \geqslant 1/2$.*

Если в приближении (4) параметры $n(h)$ и α выбирать так, что $n \to \infty$, $\alpha \to 0$, $\Delta/(h + \alpha) \to 0$ при $\Delta \to 0$, то $e_{n,\alpha} \to 0$ при $\Delta \to 0$.

При предположении (6) справедлива оценка (7), если выбор параметров $n(h)$ и α подчинен условиям

1) $h + \alpha \asymp \Delta^{1/(p+1)}$ *при* $p \leqslant p_0$, $p \leqslant p_1$;

2) $h \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p/(p_0(p+1))})$ *при* $p_0 < p \leqslant p_1$;

3) $\alpha \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $h = O(\Delta^{p/(p_1(p+1))})$ *при* $p_1 < p \leqslant p_0$.

Теорема 2. *Пусть уравнение (1) проектируется методом наименьших квадратов (т. е. $F_n = A_\eta H_n$; тогда (см. [23]) $h = \inf\{\|Au_n\|/\|u_n\|,\ u_n \in H_n\}$). Пусть $H_n \cap N(A) = 0$, $P_n u \to u$ при $n \to \infty$ $\forall u \in \overline{R(A^*)}$. Предполагаем, что условие (8) выполнено с $p_1 \geqslant 1$.*

Если в приближении (5) параметры $n(h)$ и α выбирать так, что $n \to \infty$, $\alpha \to 0$, $\Delta/(h + \alpha^{1/2}) \to 0$ при $\Delta \to 0$, то $e_{n,\alpha} \to 0$ при $\Delta \to 0$.

При предположении (6) справедлива оценка (7), если выбор параметров $n(h)$ и α подчинен условиям

1) $h + \alpha^{1/2} \asymp \Delta^{1/(p+1)}$ *при* $p \leqslant 2p_0$, $p \leqslant p_1$;

2) $h \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p/(p_0(p+1))})$ *при* $2p_0 < p \leqslant p_1$;

3) $\alpha \asymp \Delta^{2/(p+1)}$, $h = O(\Delta^{p/(p_1(p+1))})$ *при* $p_1 < p \leqslant 2p_0$.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) проектируется методом наименьшей ошибки (т. е. $H_n = A_\eta^* F_n$; тогда (см. [23]) $h = \inf\{\|A^* f_n\|/\|f_n\|,\ f_n \in F_n\}$). Пусть $F_n \cap N(A^*) = 0$, $Q_n f \to f$ при $n \to \infty$ $\forall f \in \overline{R(A)}$.*

Если в приближении (5) параметры $n(h)$ и α выбирать так, что $n \to \infty$, $\alpha \to 0$, $\Delta/(h + \alpha^{1/2}) \to 0$ при $\Delta \to 0$, то $e_{n,\alpha} \to 0$ при $\Delta \to 0$.

При предположении (6) справедлива оценка (7), если выполнено условие (9) с $p_2 \geqslant 1$ и выбор параметров $n(h)$ и α подчинен условиям

1) $h + \alpha^{1/2} \asymp \Delta^{1/(p+1)}$ *при* $p \leqslant 2p_0$, $p \leqslant p_2 + 1$;

2) $h \asymp \Delta^{1/(p+1)}$, $\alpha = O(\Delta^{p/(p_0(p+1))})$ *при* $2p_0 < p \leqslant p_2 + 1$;

3) $\alpha \asymp \Delta^{2/(p+1)}$, $h = O(\Delta^{p/((p_2+1)(p+1))})$ *при* $p_2 + 1 < p \leqslant 2p_0$.

Теоремы 1—3 доказаны в разделе 7.

Главный интерес в теоремах представляет случай 1), в котором параметры h и α выступают как равноправные. В случаях 2) и 3) один из параметров следует подчинить другому. Ряд дополнений к теоремам приведем в виде замечаний. Первое из них касается любых проекционных методов. Обозначим $h_\eta = \| (Q_n A_\eta P_n)^{-1} Q_n \|^{-1}$.

Замечание 1. Пусть $f \in R(A)$ и $P_n u_* \to u_*$, $\|Q_n A P_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если в приближении (5) выбор параметров $n(h)$ и α подчинен условию $\Delta + \|Q_n A (I - P_n) u_*\| = o(\alpha^{1/2} + h_\eta)$, то $e_{n,\alpha} \to 0$ при $\Delta \to 0$. С учетом неравенства $\|Q_n A (I - P_n) u_*\| \leqslant \|(I - P_n) A^*\| \; \|(I - P_n) u_*\|$ это замечание усиливает результаты [10–13].

Замечание 2. Сходимость $e_{n,\alpha} \to 0$ при $\Delta \to 0$ в теореме 1 остается в силе при замене требования $p_1 \geqslant 1/2$ дополнительным условием на выбор параметров: требуем $\|A^{1/2}(I - P_n) u_*\| / (\alpha + h)^{1/2} \to 0$ при $\Delta \to 0$.

Замечание 3. Условия (8), (9) достаточно проверить при $p = p_1$, $p = p_2$ соответственно, так как по неравенству моментов (см. [27])

$$\| |A|^p (I - P_n) \| \leqslant \| |A|^{p_1} (I - P_n) \|^{p/p_1} \quad \text{при} \quad p \leqslant p_1;$$

$$\| |A^*|^p (I - Q_n) \| \leqslant \| |A^*|^{p_2} (I - Q_n) \|^{p/p_2} \quad \text{при} \quad p \leqslant p_2.$$

Замечание 4. В выражениях $h + \alpha$ в теореме 1 и в выражениях $h + \alpha^{1/2}$ в теоремах 2, 3 величина h может быть заменена величиной h_η. Эквивалентность выражений при $\Delta \to 0$ вытекает из предположений $\eta/(h + \alpha) \to 0$ (теорема 1), $\eta/(h + \alpha^{1/2}) \to 0$ (теоремы 2, 3) при $\Delta \to 0$ и из оценок $h - \eta \leqslant h_\eta \leqslant h + \eta$ при условии $\eta < h$ (см. [23]).

4. О числе обусловленности при регуляризации спроектированных уравнений методом Лаврентьева или Тихонова

Отметим сперва эквивалентность некоторых алгоритмов. Пусть $F = H$, $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$. Если уравнение (1) дискретизуется методом Галеркина и регуляризуется затем методом Лаврентьева, то приближение $u_{n,\alpha}$ находится из уравнения

$$(\alpha I + P_n A_\eta P_n) u_{n,\alpha} = P_n f_\delta. \tag{10}$$

Такое же уравнение получается при регуляризации уравнения (1) методом Лаврентьева и дискретизации затем методом Галеркина.

При дискретизации уравнения (1) методом наименьших квадратов и регуляризации затем методом Тихонова получается уравнение

$$(\alpha I + P_n A_\eta^* A_\eta P_n) u_{n,\alpha} = P_n A_\eta^* f_\delta, \tag{11}$$

возникающее также после применения методов Тихонова и Галеркина к (1).

В случае использования методов наименьшей ошибки и Тихонова уравнение (1) принимает вид $(\alpha I + A_\eta^* Q_n A_\eta)\ u_{n,\alpha} = A_\eta^* Q_n f_\delta$. Другой вариант реализации методов состоит в нахождении приближения $f_{n,\alpha}$ из уравнений

$$(\alpha I + Q_n A_\eta A_\eta^* Q_n) f_{n,\alpha} = Q_n f_\delta, \tag{12}$$

а потом $u_{n,\alpha} = A_\eta^* f_{n,\alpha}$.

Уравнение (10) конкретизируется выбором базиса $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ в H_n. Коэффициенты x_i, $i = 1, \ldots, n$ в представлении $u_{n,\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i$ находятся из системы линейных уравнений $B_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$ с $(B_n)_{ij} =$

$= ((\alpha I + A_\eta)\varphi_i, \varphi_j)$, $b_j = (f_\delta, \varphi_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Оценим число обусловленности матрицы B_n — отношение максимального и минимального собственного значения. Воспользуемся следующим результатом из [23].

Лемма 1. *При любом операторе $B \in L(H, H)$, $B = B^* \geqslant 0$ для числа обусловленности $k(B_n)$ матрицы B_n с элементами $(B_n)_{ij} = (B\varphi_i, \varphi_j)$ справедлива оценка*

$$k(B_n) \leqslant \|B\| k(D_n)/\nu_n, \quad \nu_n = \inf\{(Bu_n, u_n)/\|u_n\|^2, u_n \in H_n\},$$

где $k(D_n)$ число обусловленности матрицы Грама D_n, $(D_n)_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$.

Для уравнения (10) отсюда при $B = \alpha I + A_\eta$ имеем $\nu_n = \alpha + h_\eta$,

$$k(B_n) \leqslant (\alpha + \eta + \|A\|)\, k(D_n)\, (\alpha + h_\eta)^{-1}.$$

Уравнение (11) также равносильно системе линейных уравнений $B_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$, здесь $(B_n)_{ij} = \alpha(\varphi_i, \varphi_j) + (A_\eta\varphi_i, A_\eta\varphi_j)$, $b_j = (f_\delta, A_\eta\varphi_j)$. Из леммы 1 при $B = \alpha I + A_\eta^* A_\eta$ имеем $\nu_n = \alpha + h_\eta^2$ и

$$k(B_n) \leqslant (\alpha + \eta + \|A\|^2)\, k(D_n)\, (\alpha + h_\eta^2)^{-1}.$$

Пусть решение уравнения (12) ищется в виде $f_{n,\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i$, где $\{\psi_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ — базис F_n с матрицей Грама $\bar{D}_n$, $(\bar{D}_n)_{ij} = (\psi_i, \psi_j)$. Вектор коэффициентов $\mathbf{x}$ находится из уравнений $B_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $(B_n)_{ij} = \alpha(\psi_i, \psi_j) + (A_\eta^*\psi_i, A_\eta^*\psi_j)$, $b_j = (f_\delta, \psi_j)$. Заменяя в лемме 1 φ_i на ψ_i, B на $\alpha I + A_\eta A_\eta^*$, u_n на f_n; имеем $\bar{\nu}_n = \inf\{((\alpha I + A_\eta A_\eta^*) f_n, f_n)/\|f_n\|^2, f_n \in F_n\} = \alpha + h_\eta^2$ и

$$k(B_n) \leqslant (\alpha + \eta + \|A\|^2)\, k(\bar{D}_n)\, (\alpha + h_\eta^2)^{-1}.$$

Отметим, что базисы $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ можно выбирать так, что $k(D_n) \leqslant C$, $k(\bar{D}_n) \leqslant C$.

5. Приложения к интегральному уравнению Вольтерра I рода

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t K(t,s)\, u(s)\, ds = f(t) \tag{13}$$

как операторное уравнение $Au = f$ с $A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$. Пусть ядро представимо в виде $K(t, s) = H(t, s)(t - s)^{l-1}$, где $H(t, t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а l — положительное целое число. Предполагаем, что при $i = 1, \ldots, l$ величины $\dfrac{\partial^i H}{\partial t^i}(t - s)^{i-1}$, $\dfrac{\partial^i H}{\partial s^i}(s - t)^{i-1}$ ограничены. Обозначим через S_n^k подпространство сплайнов на $[0, 1]$ порядка $k - 1$ с узлами $t_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$. Из результатов [23] вытекает, что в методе наименьших квадратов для (13) с $H_n = S_n^k$ условие (8) выполнено с $p_1 = k/l$, в методе наименьшей ошибки для (13) с $F_n = S_n^k$ условие (9) выполнено с $p_2 = k/l$; в обоих случаях $h \geqslant Cn^{-l}$. В действительности $h \asymp n^{-l}$. Именно, при выборе $u_n \in S_n^k$ и $f_n \in S_n^k$ так, что $u_n(t) = 0$ при $t \notin (1 - 1/n, 1)$, $f_n(t) = 0$ при $t \notin (0, 1/n)$, легко оценить $\|Au_n\|/\|u_n\| \leqslant Cn^{-l}$, $\|A^* f_n\|/\|f_n\| \leqslant Cn^{-l}$.

6. Вспомогательные результаты

Доказательству теорем 1—3 предпошлем некоторые леммы.

Лемма 2 (см. [5]). *При B, $B_\eta \in L(H, F)$, $\|B_\eta - B\| \leqslant \eta$ и любом вещественном $r \geqslant 0$ справедлива оценка*

$$\||B_\eta|^r - |B|^r\| \leqslant C(1 + |\ln \eta|)\, \eta^{\min(1, r)}, \tag{14}$$

при $B = B^* \geqslant 0$, $B_\eta = B_\eta^* \geqslant 0$ *справедлива также*

$$\|B_\eta^r - B^r\| \leqslant C\eta^{\min(1,r)}. \tag{15}$$

Лемма 3. *При* $F = H$, $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$, $F_n = H_n$ *справедливы оценки*

$$\|(I - P_n)A_\eta^r\| \leqslant C(\eta^{\min(r,1)} + h^{\min(r,p_1)}), \tag{16}$$

$$\|g_\alpha(A_{\eta,n})P_n\| \leqslant C(\alpha + h_\eta)^{-1}, \tag{17}$$

$$\|g_\alpha(A_{\eta,n})P_nA_\eta(I - P_n)\| \leqslant C(\eta^{1/2} + h^{\min(1/2,p_1)})/(\alpha + h_\eta)^{1/2}, \tag{18}$$

где r любое вещественное число и $A_{\eta,n} = P_nA_\eta P_n$.

Доказательство. Оценка (16) вытекает из (15), (8) и неравенства $\|(I - P_n)A_\eta^r\| \leqslant \|I - P_n\|\,\|A_\eta^r - A^r\| + \|(I - P_n)A^r\|$. По условиям (2), (3) имеем $\|g_\alpha(A_{\eta,n})P_n\| \leqslant \|g_\alpha(A_{\eta,n})\| \leqslant C\alpha^{-1}$, $\|g_\alpha(A_{\eta,n})A_{\eta,n}\| \leqslant 1 + \|I - g_\alpha(A_{\eta,n})A_{\eta,n}\| \leqslant C$. С помощью неравенств $\|g_\alpha(A_{\eta,n})P_n\| \leqslant \|g_\alpha(A_{\eta,n})A_{\eta,n}\|\,\|A_{\eta,n}^{-1}P_n\| \leqslant Ch_\eta^{-1}$, $\min(\alpha^{-1}, h_\eta^{-1}) \leqslant 2(\alpha + h_\eta)^{-1}$ получаем оценку (17). Оценка (18) вытекает из (16), (17) и соотношений

$$\|g_\alpha(A_{\eta,n})P_nA_\eta(I - P_n)\| \leqslant \|g_\alpha(A_{\eta,n})P_nA_\eta^{1/2}\|\,\|A_\eta^{1/2}(I - P_n)\|,$$

$$\|g_\alpha(A_{\eta,n})P_\eta A_\eta^{1/2}\| = \|g_\alpha(A_{\eta,n})P_nA_\eta^{1/2}[g_\alpha(A_{\eta,n})P_nA_\eta^{1/2}]^*\|^{1/2} =$$

$$= \|g_\alpha(A_{\eta,n})A_{\eta,n}P_ng_\alpha = (A_{\eta,n})\|^{1/2} \leqslant C\|P_ng_\alpha(A_{\eta,n})\|^{1/2}.$$

Лемма 4. *Справедливы неравенства*

$$\|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*\| \leqslant C(\alpha^{1/2} + h_\eta)^{-1}; \tag{19}$$

$$\|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*A_\eta(I - P_n)\| \leqslant C(\eta + \bar{h}^{\min(1,p_1)})/(\alpha^{1/2} + h_\eta); \tag{20}$$

где $A_{\eta,n} = Q_nA_\eta P_n$, $B_{\eta,n} = A_{\eta,n}^*A_{\eta,n}$.

Доказательство. По условиям (2), (3) имеем $\|g_\alpha(B_{\eta,n})\| \leqslant C\alpha^{-1}$, $\|g_\alpha(B_{\eta,n})B_{\eta,n}\| \leqslant C$. Далее, $\|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*\|^2 = \|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^* \times [g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*]^*\| = \|g_\alpha(B_{\eta,n})B_{\eta,n}g_\alpha(B_{\eta,n})\| \leqslant \|g_\alpha(B_{\eta,n})B_{\eta,n}\| \times \|g_\alpha(B_{\eta,n})\| \leqslant C\alpha^{-1}$. Учитывая равенство $(B_{\eta,n})^{-1}A_{\eta,n}^* = A_{\eta,n}^{-1}Q_n$, получим $\|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*\| \leqslant \|g_\alpha(B_{\eta,n})B_{\eta,n}\|\,\|(B_{\eta,n})^{-1}A_{\eta,n}^*\| \leqslant Ch_\eta^{-1}$. Оценка (19) вытекает теперь из неравенства $\min(\alpha^{-1/2}, h_\eta^{-1}) \leqslant 2(\alpha^{1/2} + h_\eta)^{-1}$. Оценка (20) имеет место в силу (19), (8) и неравенств $\|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*A_\eta(I - P_n)\| \leqslant \|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*\|\,(\|A(I - P_n)\| + \eta)$, $\|A(I - P_n)\| \leqslant \||A|(I - P_n)\|$. Последнее неравенство следует из полярного разложения (см. напр., [5], с. 21) $A = U|A|$, где U — частичная изометрия, $\|U\| = 1$.

Лемма 5. *Если условие (9) выполнено с* $p_2 \geqslant 1$, *то при* $H_n = A_\eta^*F_n$ *справедлива оценка*

$$\|(I - P_n)|A|^p\| \leqslant Ch^{1+\min(p-1,\,p_2)} + C(1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(p,1)}. \tag{21}$$

Доказательство. По (14) имеем

$$\|(I - P_n)|A|^p\| \leqslant \|(I - P_n)|A_\eta|^p\| + C(1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(p,1)}. \tag{22}$$

При $p \geqslant 2$ справедлива оценка

$$\|(I - P_n)|A_\eta|^p\| \leqslant \|A_\eta^*(I - Q_n)A_\eta|A_\eta|^{p-2}\|, \tag{23}$$

так как по свойству $H_n = A_\eta^*F_n$ имеем $\|(I - P_n)|A_\eta|^pv\| = \inf\{\||A_\eta|^pv - A_\eta^*f_n\|,\ f_n \in F_n\} \leqslant \|A_\eta^*A_\eta|A_\eta|^{p-2}v - A_\eta^*Q_nA_\eta|A_\eta|^{p-2}v\|$.

Убедимся в справедливости оценок

$$\|A_\eta^*(I-Q_n)\| \leqslant C(h+\eta), \tag{24}$$

$$\|A_\eta^*(I-Q_n)A_\eta\| \leqslant C(h+\eta)^2. \tag{25}$$

Воспользуясь полярным разложением $A^*=U^*|A^*|$, $\|U^*\|=1$, имеем $\|A_\eta^*(I-Q_n)\| \leqslant \|(A_\eta^*-A^*)(I-Q_n)\|+\|U^*|A^*|(I-Q_n)\| \leqslant \|A_\eta^*-A^*\|+ + \||A^*|(I-Q_n)\|$. Оценка (24) вытекает из (9), оценка (25) из свойства $I-Q_n=(I-Q_n)^2$ неравенства $\|A_\eta{}^*(I-Q_n)^2A_\eta\| \leqslant \|A_\eta{}^*(I-Q_n)\|^2$ и (24).

По (23), (25) имеем $\|(I-P_n)|A_\eta|^2\| \leqslant C(h+\eta)^2$, а в силу неравенства моментов также $\|(I-P_n)|A_\eta|^p\| \leqslant C(h+\eta)^p$ при $p \leqslant 2$. В силу (22) оценка (21) при $p \leqslant 2$ получена, при $p>2$ она вытекает из (23) и из установленной ниже оценки

$$\|A_\eta^*(I-Q_n)A_\eta(A_\eta^*A_\eta)^r\| \leqslant Ch^{1+\min(2r+1,\,p_2)}+C(1+|\ln\eta|)\eta \quad (r \geqslant 0). \tag{26}$$

Оценим $\|A_\eta^*(I-Q_n)A_\eta(A_\eta^*A_\eta)^r\| \leqslant \|A_\eta^*(I-Q_n)\|\,\|(I-Q_n)A_\eta(A_\eta^*A_\eta)^r\|$. В силу равенства $A_\eta(A_\eta{}^*A_\eta)^r=(A_\eta A_\eta{}^*)^r A_\eta$ и полярного разложения $A_\eta=\|A_\eta^*\|U_\eta$, $\|U_\eta\|=1$ имеем $\|(I-Q_n)A_\eta(A_\eta^*A_\eta)^r\| \leqslant (I-Q_n)|A_\eta^*|^{2r+1}\| \leqslant \leqslant \|(I-Q_n)|A^*|^{2r+1}\|+\||A^*|^{2r+1}-|A_\eta^*|^{2r+1}\|$. Теперь оценка (26) вытекает из (24), (9) и (14). Лемма доказана.

7. Доказательство теорем 1—3

Основные идеи доказательств заимствованы из [5].

Доказательство теоремы 1. По (4) имеем

$$u_{n,\alpha}-u_*=G_{n,\alpha,\eta}(u_0-u_*)-[I-g_\alpha(A_{\eta,n})P_nA_\eta(I-P_n)](I-P_n)u_*+ +g_\alpha(A_{\eta,n})P_n(f_\delta-A_\eta u_*), \quad A_{\eta,n}=P_nA_\eta P_n, \quad G_{n,\alpha,\eta}=[I-A_{\eta,n}g_\alpha(A_{\eta,n})]P_n. \tag{27}$$

При помощи теоремы Банаха—Штейнгауза убеждаемся, что

$$G_{n,\alpha,\eta}(u_0-u_*)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty, \quad \alpha\to 0, \quad \eta\to 0. \tag{28}$$

По условию (3) $\|G_{n,\alpha,\eta}\| \leqslant C$. Поскольку u_* — ближайшее к u_0 решение уравнения (1), то $u_0-u_* \in \mathcal{N}(A)^\perp$ и, следовательно, $u_0-u_* \in \overline{R(A)}$. Для элементов вида $u=Av$ $(v \in H)$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, с учетом полной непрерывности A и условия (3) имеем $\|G_{n,\alpha,\eta}u\|=\|G_{n,\alpha,\eta}P_nAv\| \leqslant \|G_{n,\alpha,\eta}\|\,\|P_nA(I-P_n)+P_n(A-A_\eta)P_n\|\,\|v\|+ +\|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}\|\,\|v\| \leqslant C[\|A(I-P_n)\|+\eta+\|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}\|]\,\|v\|\to 0$ при $n\to\infty$, $\alpha\to 0$; $\eta\to 0$.

В силу предположения $p_1 \geqslant 1/2$ по (18) имеем

$$\|[I-g_\alpha(A_{\eta,n})P_nA_\eta(I-P_n)](I-P_n)u_*\| \leqslant [1+C(\eta^{1/2}+h^{1/2})/(\alpha+h_\eta)^{1/2}]\times \times\|(I-P_n)u_*\|, \tag{29}$$

где $\|(I-P_n)u_*\|\to 0$ при $n\to\infty$, так как $u_* \in \overline{R(A)}$ по условиям u_0, $u_0-u_* \in \overline{R(A)}$.

Из (17) вытекает оценка

$$\|g_\alpha(A_{\eta,n})P_n(f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant C\Delta/(\alpha+h_\eta). \tag{30}$$

Сходимость $g_{n,\alpha} \to 0$ при $\Delta \to 0$ следует из (27)—(30) и из правила выбора n и α.

Для оценки ошибки необходимы неравенства

$$\|P_n A_\eta^{1/2} P_n - A_{\eta,n}^{1/2}\| \leqslant C\|(I-P_n)A_\eta^{1/2}\|, \tag{31}$$

$$\|A_\eta^r - A_{\eta,n}^r\| \leqslant C(h+\eta)^r \quad (r \leqslant 1/2). \tag{32}$$

Оценка (31) вытекает с помощью (15) из соотношения

$\|(P_n A_\eta^{1/2} P_n)^2 - P_n A_\eta P_n\| = \|P_n A_\eta^{1/2}(P_n - I)A_\eta^{1/2} P_n\| \leqslant \|(I-P_n)A_\eta^{1/2}\|^2.$

Оценка (32) следует из неравенства $\|A_\eta^{1/2} - A_{\eta,n}^{1/2}\| \leqslant \|A_\eta^{1/2} - P_n A_\eta^{1/2}\| + \|P_n(A_\eta^{1/2} - A_\eta^{1/2} P_n)\| + \|P_n A_\eta^{1/2} P_n - A_{\eta,n}^{1/2}\| \leqslant C\|(I-P_n)A_\eta^{1/2}\|$ и оценок (15), (16).

Предполагая (6) и используя (8) и (15), можно оценить

$$\|(I-P_n)u_*\| = \|(I-P_n)A^p(w-v)\| \leqslant \|(I-P_n)A^p\|\,\|w-v\| \leqslant \leqslant Ch^{\min(p,p_1)}, \tag{33}$$

$$\|G_{n,\alpha,\eta}(u_0 - u_*)\| = \|G_{n,\alpha,\eta}[(A^p - A_\eta^p) + A_\eta^p]v\| \leqslant \leqslant C\eta^{\min(p,1)} + \|G_{n,\alpha,\eta}A_\eta^p\|\,\|v\|. \tag{34}$$

Рассмотрим сперва случай $p \leqslant 1/2$. В силу (32), (3) имеем

$$\|G_{n,\alpha,\eta}A_\eta^p\| \leqslant \|G_{n,\alpha,\eta}\|\,\|A_\eta^p - A_{\eta,n}^p\| + \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^p\| \leqslant \leqslant C(h+\eta)^p + C\alpha^{\min(p,p_0)}. \tag{35}$$

В случае $1/2 < p < 1$ воспользуемся полярным разложением

$$P_n A_\eta^{1/2} = [P_n A_\eta^{1/2}(P_n A_\eta^{1/2})^*]^{1/2} U_{\eta,n} = A_{\eta,n}^{1/2} U_{\eta,n}, \quad \|U_{\eta,n}\| = 1. \tag{36}$$

С учетом равенства $G_{n,\alpha,\eta} = G_{n,\alpha,\eta}P_n$ в силу (32), (3) имеем

$$\|G_{n,\alpha,\eta}A_\eta^p\| \leqslant \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^{1/2}\|\,\|U_{\eta,n}\|\,\|A_\eta^{p-1/2} - A_{\eta,n}^{p-1/2}\| + \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^{1/2}U_{\eta,n}A_{\eta,n}^{p-1/2}\| \leqslant \leqslant C\alpha^{\min(1/2,p_0)}(h+\eta)^{p-1/2} + C\alpha^{\min(p,p_0)}. \tag{37}$$

При $p \geqslant 1$ воспользуемся представлением ($[p]$ — целая часть p)

$$P_n A_\eta^p = \sum_{i=1}^{[p]} A_{\eta,n}^{i-1} P_n A_\eta (I-P_n) A_\eta^{p-i} + A_{\eta,n}^{[p]} A_\eta^{p-[p]} =: \Sigma + \sigma, \tag{38}$$

вытекающим из равенств $P_n A_\eta^{p-i} = P_n A_\eta[(I-P_n) + P_n]A_\eta^{p-i-1}$ при $0 \leqslant i \leqslant [p]-1$. В силу (3) и (31) имеем

$$\|G_{n,\alpha,\eta}\Sigma\| \leqslant \sum_{i=1}^{[p]} \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^{i-1}\|\,\|(I-P_n)A_\eta\|\,\|(I-P_n)A_\eta^{p-i}\| \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{i=1}^{[p]} \alpha^{\min(i-1,p_0)}(h^{\min(1,p_1)}+\eta)(h^{\min(p-1,p_1)} + \eta^{\min(p-1,1)}). \tag{39}$$

В случае $p - [p] \leqslant 1/2$ оценим с помощью (32) и (3)

$$\|G_{n,\alpha,\eta}\sigma\| \leqslant \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^{[p]}\|\,\|A_\eta^{p-[p]} - A_{\eta,n}^{p-[p]}\| + \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^p\| \leqslant \leqslant C\alpha^{\min([p],p_0)}(h+\eta)^{p-[p]} + C\alpha^{\min(p,p_0)}. \tag{40}$$

В случае $p - [p] > 1/2$ с учетом равенств $A_{\eta,n}^{[p]} = A_{\eta,n}^{[p]}P_n$ и (36), оценок (32) и (3) имеем

$$\|G_{n,\alpha,\eta}\sigma\| = \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^{[p]}P_nA_\eta^{1/2}A_\eta^{p-[p]-1/2}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^{[p]+1/2}\|\,\|U_{\eta,n}\|\,\|A_\eta^{p-[p]-1/2} - A_{\eta,n}^{p-[p]-1/2}\| +$$

$$+ \|G_{n,\alpha,\eta}A_{\eta,n}^{[p]+1/2}U_{\eta,n}A_{\eta,n}^{p-[p]-1/2}\| \leqslant \tag{41}$$

$$\leqslant C\alpha^{\min([p]+1/2,\,p_0)}(h+\eta)^{p-[p]-1/2} + C\alpha^{\min(p,\,p_0)}.$$

Используя неравенства типа $x^\Theta y^{1-\Theta} \leqslant \max(x, y)$ $(0 < \Theta < 1)$, $(x+y)^r \leqslant 2^r \max(x^r, y^r)$, по (27), (29), (30), (33)—(35), (37)—(41) имеем

$$\|u_{n,\alpha} - u_*\| \leqslant C[h^{\min(p,\,p_1)} + \alpha^{\min(p,\,p_0)} + \eta^{\min(p,\,1)} + \Delta/(h_\eta + \alpha)].$$

Отсюда и из правил выбора n и α вытекает оценка (7).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, вместо леммы 3 используется лемма 4.

Доказательство теоремы 3. По (5) имеем

$$u_{n,\alpha} - u_* = K_{n,\alpha,\eta}(u_0 - u_*) - (I - P_n)u_* + g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^{*}(f_\delta - A_\eta u_*), \tag{42}$$

где $A_{\eta,n} = Q_nA_\eta$, $B_{\eta,n} = A_\eta^* Q_nA_\eta$, $K_{n,\alpha,\eta} = [I - B_{\eta,n}g_\alpha(B_{\eta,n})]P_n$.

Мы учли, что в методе наименьшей ошибки $P_nA_\eta{}^*Q_n = A_\eta{}^*Q_n$, откуда $Q_nA_\eta P_n = Q_nA_\eta$ и, следовательно, $A_{\eta,n}^*A_\eta(I - P_n) = A_\eta^* Q_nA_\eta P_n \times (I - P_n) = 0$.

С помощью теоремы Банаха—Штейнгауза убеждаемся, что

$$K_{n,\alpha,\eta}(u_0 - u_*) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \alpha \to 0, \quad \eta \to 0. \tag{43}$$

По условию (3) $\|K_{n,\alpha,\eta}\| \leqslant C$; $u_0 - u_* \in \overline{R(A^*)}$; для элементов $u = A^*Av$ $(v \in H)$, образующих в $\overline{R(A^*)}$ плотное подмножество, имеем по (3)

$$\begin{gathered}\|K_{n,\alpha,\eta}u\| = \|K_{n,\alpha,\eta}A^*Av\| \leqslant \|K_{n,\alpha,\eta}\|\,\|A^*(I - Q_n)A + A^*Q_n(A - A_\eta) + \\ + (A^* - A_\eta)Q_nA_\eta\|\,\|v\| + \|K_{n,\alpha,\eta}B_{\eta,n}\|\,\|v\| \leqslant \\ \leqslant C[\|(I - Q_n)A\|^2 + \eta + \|K_{n,\alpha,\eta}B_{\eta,n}\|] \to 0 \\ \text{при} \quad n \to \infty, \quad \alpha \to 0, \quad \eta \to 0.\end{gathered}$$

С учетом $u_* \in \overline{R(A^*)}$ имеем

$$(I - P_n)u_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{44}$$

Из тождества $f_\delta - A_\eta u_* = (f_\delta - f) + (A - A_\eta)u_*$, равенства $A_{\eta,n}^* = A_{\eta,n}^*Q_n$ и неравенства (19) вытекает оценка

$$\|g_\alpha(B_{\eta,n})A_{\eta,n}^*(f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant C\Delta/(\alpha^{1/2} + h_\eta). \tag{45}$$

Сходимость $e_{n,\alpha} \to 0$ при $\Delta \to 0$ следует из (42)—(45) и из правила выбора n и α.

Пусть выполнено условие (6), а также (9) с $p_2 \geqslant 1$. По (21) и (14) имеем

$$\begin{gathered}\|(I - P_n)u_*\| = \|(I - P_n)|A|^p(w - v)\| \leqslant \\ \leqslant Ch^{1+\min(p-1,\,p_2)} + C(1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(p,\,1)},\end{gathered} \tag{46}$$

$$\|K_{n,\alpha,\eta}(u_0-u_*)\|=\|K_{n,\alpha,\eta}[(|A|^p-|A_\eta|^p)+|A_\eta|^p]v\|\leqslant$$
$$\leqslant C(1+|\ln\eta|)\eta^{\min(p,1)}+\|K_{n,\alpha,\eta}|A_\eta|^p\|\,\|v\|. \qquad (47)$$

Из (25) и (15) вытекает оценка

$$\||A_\eta|^r-B^{r/2}_{\eta,n}\|\leqslant C(h+\eta)^r \qquad (r\leqslant 2). \qquad (48)$$

При $p\leqslant 2$ по (48) и (3) имеем

$$\|K_{n,\alpha,\eta}|A_\eta|^p\|\leqslant\|K_{n,\alpha,\eta}\|\,\||A_\eta|^p-B^{p/2}_{\eta,n}\|+\|K_{n,\alpha,\eta}B^{p/2}_{\eta,n}\|\leqslant$$
$$\leqslant C(h+\eta)^p+C\alpha^{\min(p/2,\,p_0)}. \qquad (49)$$

При $p>2$ воспользуемся представлением

$$|A_\eta|^p=B^{p/2}_{\eta,n}+B^{[p/2]}_{\eta,n}[|A_\eta|^{p-2[p/2]}-B^{p/2-[p/2]}_{\eta,n}]+$$
$$+\sum_{i=1}^{[p/2]}B^{i-1}_{\eta,n}A^*_\eta(I-Q_n)A_\eta|A_\eta|^{p-2i},$$

получаемым привлечением равенств $|A_\eta|^{p-2i}=A^*_\eta[(I-Q_n)+Q_n]\times$ $\times A_\eta|A_\eta|^{p-2i-2}$ при $0\leqslant i\leqslant[p/2]-1$.

По (3), (48) и (26) имеем

$$\|K_{n,\alpha,\eta}|A_\eta|^p\|\leqslant\|K_{n,\alpha,\eta}B^{p/2}_{\eta,n}\|+\|K_{n,\alpha,\eta}B^{[p/2]}_{\eta,n}\|\,\||A_\eta|^{p-2[p/2]}-B^{p/2-[p/2]}_{\eta,n}\|+$$
$$+\sum_{i=1}^{[p/2]}\|K_{n,\alpha,\eta}B^{i-1}_{\eta,n}\|\,\|A^*_\eta(I-Q_n)A_\eta|A_\eta|^{p-2i}\|\leqslant$$
$$\leqslant C\alpha^{\min(p/2,\,p_0)}+C\alpha^{\min([p/2],\,p_0)}(h+\eta)^{p-2[p/2]}+ \qquad (50)$$
$$+C\sum_{i=1}^{[p/2]}\alpha^{\min(i-1,\,p_0)}[h^{1+\min(p-2i+1,\,p_2)}+(1+|\ln\eta|)\eta].$$

По (42), (45)—(47), (49) и (50) имеем

$$\|u_{n,\alpha}-u_*\|\leqslant C[h^{1+\min(p-1,\,p_2)}+\alpha^{\min(p/2,\,p_0)}+$$
$$+(1+|\ln\eta|)\eta^{\min(p,1)}+\Delta/(h_\eta+\alpha^{1/2})].$$

Отсюда и из правил выбора n и α вытекает оценка (7).

Теорема 3 доказана.

Основные результаты настоящей статьи анонсированы в [28].

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. Вайникко за постановку задачи и многие полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
2. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., «Наука», 1978.
3. *Лисковец О. А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск, «Наука и техника», 1981.
4. *Танана В. П.* Методы решения операторных уравнений. М., «Наука», 1981.
5. *Вайникко Г.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, Изд. ТГУ, 1982.
6. *Лисковец О. А.* Итоги науки и техники (матем. анализ). М., Изд. ВИНИТИ, **20**, 116—178 (1982).
7. *Natterer, F.* RAIRO Analyse numerique, **11**, № 3, 271—278 (1977).
8. *Кнопова С. М., Савёлова Т. И.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **19**, № 5, 1091—1096 (1979).
9. *Иванов В. В., Кудринский В. Ю.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, № 5, 831—841 (1966).
10. *Калякин Л. А.* В кн.: Методы решения условно-корректных задач. Свердловск, 1975, 53—66.

11. *Marti, J. T.* Math. Comput., **34**, № 150, 521—527 (1980).
12. *Groetsch, C. W.* J. Integr. Equat., **4**, № 2, 173—182 (1982).
13. *Hickey, K. R., Luecke, G. R.* SIAM J. Numer. Anal., **19**, № 3, 623—628 (1982).
14. *Вайникко Г.* В кн.: Тезисы конференции «Методы алгебры и анализа». Тарту, Изд. ТГУ, 1983, 106—109.
15. *Страхов В. Н.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **10**, № 1, 204—210, (1970).
16. *Савёлова Т. И.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **14**, № 4, 1027—1031 (1974).
17. *Nashed, M. Z., Wahba, G.* Math. Comput., **28**, № 125, 69—80 (1974).
18. *Бушманова М. В.* Изв. вузов. Математика, № 9, 11—17 (1977).
19. *Natterer, F.* Numer. Math., **28**, № 3, 329—341 (1977).
20. *Richter, G. R.* SIAM J. Numer. Anal., **15**, № 3, 511—522 (1978).
21. *Воронин В. В., Цецохо В. А.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **21**, № 1, 40—53 (1981).
22. *Seidman T. I.* Contr. and Cybern., **10**, № 1—2, 31—71 (1981).
23. *Хямарик У. А.* Тр. вычисл. центра ТГУ, **50**, 69—90 (1983).
24. *Baker, C. T. H.* The Numerical Treatment of Integral Equations. Oxford, Clarendon Press, 1977.
25. *Brunner, H.* J. Comput. and Appl. Math., **8**, № 3, 213—229 (1982).
26. *Апарцин А. С.* В кн.: Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск, «Наука», 1982, 138—146.
27. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
28. *Хямарик У. А.* В кн.: Тезисы конференции «Методы алгебры и анализа», Тарту, Изд. ТГУ, 1983, 145—147.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 29/IX 1983

U. HÄMARIK

REGULARISEERITUD PROJEKTSIOONIMEETODID MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE LAHENDAMISEKS

Artiklis on vaadeldud mittekorrektse ülesande kaheparameetrilist regularisatsiooni: ülesanne diskretiseeritakse projektsioonimeetodil ja seejärel regulariseeritakse. Projektsioonimeetodit on rakendatud tingimustel, kui projekteeritud ülesande mõõdete arv on vaadeldav ühe regularisatsiooniparameetrina. On toodud parameetrite valiku eeskirjad nii regulariseeriva algoritmi kui ka optimaalse järguga veahinnangu saamiseks.

U. HÄMARIK

REGULARIZED PROJECTION METHODS FOR ILL-POSED PROBLEMS

Let H, F be Hilbert spaces, $A\in L(H,F)$ be a compact operator. Consider problem

$$Au=f; \tag{1}$$

$N(A)$ need not be trivial, $f\in R(A)$. Instead of A and f are given $A_\eta\in L(H,F)$ and f_δ with errors $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$. Problem (1) is discretized by the projection method, using orthogonal projections $P_n: H\to H_n$, $Q_n: F\to F_n$, $\dim H_n=\dim F_n=n$. Discretized problem $Q_nA_\eta P_n\ u_n=Q_nf_\delta$, $u_n\in H_n$ is regularized by a method of class of [5], including methods of Tikhonov and Lavrentyev, iteration methods, and others. We, namely, use function g_α with properties (2), (3) and approximate nearest to initial approximation u_0 least square solution of (1) by $u_{n,\alpha}$ in (4) (selfadjoint case) or (5).

Theorem 1. Let $F=H$, $A=A^*\geqslant 0$, $A_\eta=A_\eta^*\geqslant 0$. Discretize (1) by method of Galerkin ($F_n=H_n$). Let $H_n\cap N(A)=0$, $P_nu\to u$ if $n\to\infty$ $\forall u\in\overline{R(A^*)}$ and in (8) let $p_1\geqslant 1/2$. Choose n and α in (4) according to $\Delta=\max(\delta,\eta)$, so that $n\to\infty$, $\alpha\to 0$, $\Delta/(h+\alpha)\to 0$ if $\Delta\to 0$. (Here $h=\inf\{(Au_n,u_n)/\|u_n\|^2,\ u_n\in H_n\}$). Then $e_{n,\alpha}:=\|u_{n,\alpha}-u_*\|\to 0$ if $\Delta\to 0$. In assumption (6) error estimate of optimal order (7) holds by choosing n and α according to rules 1)—3) in Theor. 1.

Analogous theorems are also proved for the least square method ($F_n=A_\eta H_n$) and for the method of minimal error ($H_n=A_\eta^*F_n$). Condition number bounds for the coefficient matrix in (4) or (5) are obtained. Applications to Volterra integral equation of the first kind are given.