EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS
1984, 33. 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1984.3.01

УДК 517.94

П. КАРД

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Рассматриваемые в настоящей статье преобразования линейных дифференциальных уравнений позволяют находить решения новых уравнений, остававшихся до сих пор, по-видимому, нерешенными. Сочетание этих преобразований с показанным в предыдущей статье [1] методом получения новых волновых уравнений, решаемых в замкнутом виде, расширяет возможности этого метода. Помимо этого, наши преобразования пригодны и для вывода иных, не волновых уравнений, характеризуемых теми или другими заданными формами. В первую очередь сказанное относится к уравнениям второго порядка, но и в теории уравнений высших порядков можно, вероятно, найти полезные применения.

Основное преобразование

Начнем с уравнений второго порядка. Пусть задано уравнение вида

$$d^2y/dx^2+f_1(x)\,dy/dx+f^2(x)\,y=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ не равно тождественно нулю. Подстановка

$$\theta=f^{-1}dy/dx \tag{2}$$

дает для θ следующее уравнение второго порядка

$$\theta''+f_1\theta'+(f^2-2f^{-2}f'^2+f^{-1}f''+f'_1-f^{-1}f'f_1)\,\theta=0, \tag{3}$$

где штрих означает производную по x. Понятно, такое преобразование возможно только при условии, что $f(x)$ — не менее чем дважды, а $f_1(x)$ — не менее чем однажды дифференцируемая функция. Это мы и предполагаем. В дальнейшем тоже будем везде считать, что все встречающиеся функции дифференцируемы нужное число раз.

Обобщим теперь преобразование (2) на уравнения любого порядка выше второго. Возьмем линейное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+f_{n-1}y^{(n-1)}+f_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+f_1y'+f_0y=0, \tag{4}$$

где

$$f_0=f^n \tag{5}$$

и $f\not\equiv 0$. Умножив уравнение на f^{-n}, взяв производную по x и умножив на f^{n-1}, находим

$$\sum_{k=0}^{n}(f^{-1}f_k+f^{-1}f'_{k+1}-nf^{-2}f'f_{k+1})\,y^{(k+1)}=0, \tag{6}$$

где следует считать $f_n=1$ и $f_{n+1}=0$. Затем сделаем такую же, как (2), подстановку

$$y'=f\theta. \tag{7}$$

Уравнение (6) запишется тогда как

$$\sum_{k=0}^{n}\left(f^{-1}f_k+f^{-1}f'_{k+1}-nf^{-2}f'f_{k+1}\right)(f\theta)^{(k)}=0. \tag{8}$$

Раскрывая производную $(f\theta)^{(k)}$ по формуле Лейбница, находим

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}\frac{k!\,f^{(k-m)}}{m!\,(k-m)!}\left(f^{-1}f_k+f^{-1}f'_{k+1}-nf^{-2}f'f_{k+1}\right)\theta^{(m)}=0. \tag{9}$$

Это — линейное дифференциальное уравнение n-го порядка для $\theta(x)$. Написав его в виде

$$\theta^{(n)}+g_{n-1}\theta^{(n-1)}+g_{n-2}\theta^{(n-2)}+\ldots+g_1\theta'+g_0\theta=0, \tag{10}$$

имеем для коэффициентов следующую общую формулу

$$g_m=\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(m+k)!\,f^{(k)}}{k!\,m!}\left(f^{-1}f_{m+k}+f^{-1}f'_{m+k+1}-nf^{-2}f'f_{m+k+1}\right). \tag{11}$$

Отсюда, например,

$$g_{n-1}=f_{n-1}, \tag{12}$$

$$g_{n-2}=f_{n-2}+f'_{n-1}-f^{-1}f'f_{n-1}-n(n-1)f^{-2}f'^2+\frac{n(n-1)}{2}f^{-1}f'' \tag{13}$$

и т. д.

Для большей наглядности приведем полностью преобразованные уравнения третьего и четвертого порядков. Если, во-первых,

$$y'''+f_2y''+f_1y'+f^3y=0, \tag{14}$$

то, положив

$$\theta=f^{-1}y', \tag{15}$$

находим

$$\begin{aligned}&\theta'''+f_2\theta''+(f_1+f'_2-f^{-1}f'f_2-6f^{-2}f'^2+3f^{-1}f'')\theta'+\\&+(f^3+f'_1-2f^{-1}f'f_1+f^{-1}f'f'_2-3f^{-2}f'^2f_2+\\&+f^{-1}f''f_2-3f^{-2}f'f''+f^{-1}f''')\theta=0.\end{aligned} \tag{16}$$

Во-вторых, если

$$y^{\mathrm{IV}}+f_3y'''+f_2y''+f_1y'+f^4y=0, \tag{17}$$

то, положив и здесь $\theta=f^{-1}y'$ (см. формулу (15)), получаем уравнение

$$\begin{aligned}&\theta^{\mathrm{IV}}+f_3\theta'''+(f_2+f'_3-f^{-1}f'f_3-12f^{-2}f'^2+6f^{-1}f'')\theta''+\\&+(f_1+f'_2-2f^{-1}f'f_2+2f^{-1}f'f'_3-8f^{-2}f'^2f_3+3f^{-1}f''f_3-\\&-12f^{-2}f'f''+4f^{-1}f''')\theta'+(f^4+f'_1-3f^{-1}f'f_1+\\&+f^{-1}f'f'_2-4f^{-2}f'^2f_2+f^{-1}f''f_2+f^{-1}f''f'_3-\\&-4f^{-2}f'f''f_3+f^{-1}f'''f_3-4f^{-2}f'f'''+f^{-1}f^{\mathrm{IV}})\theta=0.\end{aligned} \tag{18}$$

Значительное упрощение формул достигается в рассматриваемом методе при $f_{n-1}=0$. Известно, что к виду

$$y^{(n)}+f_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+f_1y'+f_0y=0 \tag{19}$$

можно привести всякое линейное уравнение n-го порядка, если выполняются надлежащие условия дифференцируемости, что мы и предполагаем. Поэтому условие $f_{n-1}=0$ в этом предположении общности не ограничивает. Интересно, что, согласно формуле (12), преобразованное уравнение имеет тоже ту же форму. Перепишем для порядков $n=2, 3, 4$ исходные и преобразованные уравнения вида (19) полностью.

Уравнение второго порядка

$$y''+f^2y=0 \tag{20}$$

подстановкой (15) преобразуется в

$$\theta''+(f^2-2f^{-2}f'^2+f^{-1}f'')\theta=0. \tag{21}$$

Уравнение третьего порядка

$$y'''+f_1y'+f^3y=0 \tag{22}$$

подстановкой того же вида (15) преобразуется в

$$\begin{gathered}\theta'''+(f_1-6f^{-2}f'^2+3f^{-1}f'')\theta'+\\+(f'_1-2f^{-1}f'f_1+f^3-3f^{-2}f'f''+f^{-1}f''')\theta=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Уравнение четвертого порядка

$$y^{\mathrm{IV}}+f_2y''+f_1y'+f^4y=0 \tag{24}$$

такою же подстановкой (15) преобразуется в

$$\begin{gathered}\theta^{\mathrm{IV}}+(f_2-12f^{-2}f'^2+6f^{-1}f'')\theta''+\\+(f_1+f'_2-2f^{-1}f'f_2-12f^{-2}f'f''+4f^{-1}f''')\theta'+\\+(f'_1-3f^{-1}f'f_1+f^{-1}f'f'_2-4f^{-2}f'^2f_2+f^{-1}f''f_2+\\+f^4-4f^{-2}f'f'''-f^{-1}f^{\mathrm{IV}})\theta=0.\end{gathered} \tag{25}$$

Обобщение основного преобразования для уравнений второго порядка

В этом разделе приведем обобщенное преобразование для уравнения второго порядка вида (20). Вместо подстановки (15) положим теперь

$$\theta=f^{-1}(y'+py), \tag{26}$$

где $p=p(x)$ — пока неопределенная функция. Разделив уравнение (20) на f^2, взяв производную по x и умножив на f, находим

$$f^{-1}y'''-2f^{-2}f'y''+fy'=0. \tag{27}$$

Так как, согласно формуле (26),

$$y'=f\theta-py, \tag{28}$$

то, беря дважды производную и подставляя в (27), находим

$$\begin{gathered}\theta''+(f^2-2f^{-2}f'^2+f^{-1}f'')\theta-f^{-1}py''+\\+2(f^{-2}f'p-f^{-1}p')y'-(f^{-1}p''-2f^{-2}f'p'+fp)y=0,\end{gathered} \tag{29}$$

или, исключая член $-f^{-1}py''$ с помощью первичного уравнения (20),

$$\begin{gathered}\theta''+(f^2-2f^{-2}f'^2+f^{-1}f'')\theta+2(f^{-2}f'p-f^{-1}p')y'-\\-(f^{-1}p''-2f^{-2}f'p')y=0.\end{gathered} \tag{30}$$

Чтобы отсюда получить уравнение только для θ, необходимо коэффициенты при y' и y положить пропорциональными 1 и p (см. формулу (26)). Итак, потребуем, чтобы функция p удовлетворяла уравнению

$$p''-2pp'+2f^{-1}f'(p^2-p')=0. \tag{31}$$

Тогда уравнение (30) принимает вид

$$\theta''+(f^2-2f^{-2}f'^2+f^{-1}f''+2f^{-1}f'p-2p')\theta=0. \tag{32}$$

Для нахождения функции $p(x)$ перепишем уравнение (31) в виде

$$d(p'-p^2)/dx-2f^{-1}f'(p'-p^2)=0. \tag{33}$$

Интегрируя, находим

$$p' - p^2 = Cf^2, \tag{34}$$

где C — произвольная постоянная. Подстановка

$$p = -u^{-1}u' \tag{35}$$

обращает это уравнение в линейное

$$u'' + Cf^2 u = 0. \tag{36}$$

Целесообразно ввести u вместо p в подстановку (26) и в уравнение (32), причем в последнем следует исключить u'' с помощью уравнения (36). Тогда получим

$$\theta = f^{-1}(y' - u^{-1}u'y) \tag{37}$$

и

$$\theta'' + [(1-2C)f^2 - 2f^{-2}f'^2 + f^{-1}f'' - 2f^{-1}f'u^{-1}u' - 2u^{-2}u'^2]\theta = 0. \tag{38}$$

Итак, мы преобразовали уравнение (20) подстановкой (37) в уравнение (38), причем u является любой функцией, удовлетворяющей уравнению (36). Отметим, что последнее отличается от преобразуемого уравнения (20) только наличием произвольной постоянной C. Следовательно, если решение уравнения (36) при $C \neq 0$ известно, то, сделав в нем $C = 1$, получим и решение уравнения (20), которое, в свою очередь, согласно формуле (37), дает решение уравнения (38). В этом и состоит смысл нашего преобразования. Особым случаем является $C = 0$. Уравнение (36) решается тогда без труда, а для решения уравнения (38) нужно знать решение уравнения (20).

Обобщение основного преобразования для уравнений третьего порядка

Аналогичное показанному в предыдущем разделе обобщение основного преобразования возможно и для уравнений высших порядков. Мы ограничимся здесь третьим порядком.

Пусть дано уравнение (22). Разделив его на f^3, взяв производную по x и умножив на f^2, находим

$$f^{-1}y^{\mathrm{IV}} - 3f^{-2}f'y''' + f^{-1}f_1y'' + (f^2 + f^{-1}f'_1 - 3f^{-2}f'f_1)y' = 0. \tag{39}$$

Сделаем здесь подстановку такого же вида (26), как в случае второго порядка. Вычислив производные y'', y''' и y^{IV} из формулы (28), подставив их в уравнение (39) и исключив производную y''' с помощью первичного уравнения (22), а производную y'' опять с помощью формулы (28), находим уравнение

$$\begin{aligned}
&\theta''' + (f_1 - 6f^{-2}f'^2 + 3f^{-1}f'' + 3f^{-1}f'p - 3p')\theta' + \\
&+ (f'_1 - 2f^{-1}f'f_1 + f^3 - 3f^{-2}f'f'' + f^{-1}f''' + 3f^{-2}f'^2p - 3f^{-1}f'p')\theta + \\
&+ 3f^{-1}(pp' - p'' + 2f^{-1}f'p' - f^{-1}f'p^2)y' + \\
&+ f^{-1}(-p''' + 3f^{-1}f'p'' - 3f^{-1}f'pp' + 3p'^2 + 3f^{-1}f'f_1p - f_1p' - f'_1p)y = 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Чтобы исключить отсюда y и y', нужно, чтобы коэффициенты при y' и y были пропорциональны 1 и p, согласно формуле (26). Это условие дает определяющее функцию $p(x)$ уравнение

$$\begin{aligned}
&p''' - 3pp'' + 3p^2p' - 3p'^2 + 3f^{-1}f'(3pp' - p^3 - p'') + \\
&+ f_1p' + (f'_1 - 3f^{-1}f'f_1)p = 0,
\end{aligned} \tag{41}$$

а уравнение (40) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\theta''' + (f_1 - 6f^{-2}f'^2 + 3f^{-1}f'' + 3f^{-1}f'p - 3p')\theta' + \\
&+ (f'_1 - 2f^{-1}f'f_1 + f^3 - 3f^{-2}f'f'' + f^{-1}f''' + 3f^{-2}f'^2p + \\
&+ 3f^{-1}f'p' - 3p'' + 3pp' - 3f^{-1}f'p^2)\theta = 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Остается решить уравнение (41). Подстановкой

$$p''+p^3-3pp'+f_1p=q \tag{43}$$

мы приводим его к виду

$$q'-3f^{-1}f'q=0, \tag{44}$$

откуда

$$q=Cf^3, \tag{45}$$

где C — произвольная постоянная. Тогда уравнение (43) подстановкой (35) превращается в

$$u'''+f_1u'+Cf^3u=0. \tag{46}$$

Если в уравнение (42) для θ ввести u вместо p, то оно, с учетом уравнения (46), получает вид

$$\theta'''+(f_1-6f^{-2}f'^2+3f^{-1}f''-3f^{-1}f'u^{-1}u'+3u^{-1}u''-3u^{-2}u'^2)\theta'+$$
$$+[(1-3C)f^3+f'_1-2f^{-1}f'f_1-3f^{-2}f'f''+f^{-1}f'''-3f^{-2}f'^2u^{-1}u'-$$
$$-3f^{-1}f'u^{-1}u''-3f_1u^{-1}u'+3u^{-3}u'^3-6u^{-2}u'u'']\theta=0. \tag{47}$$

Таков результат преобразования уравнения (22), причем необходимая для этого подстановка имеет такой же вид (37), как и для уравнений второго порядка. Уравнение (46) для u отличается и здесь от исходного преобразуемого уравнения (22) только наличием в последнем члене добавочного множителя C. Таким образом, знание решения уравнения (46) с $C\neq 0$ позволяет немедленно получить решение уравнения (22), определяющее в свою очередь решение уравнения (47). Случай $C=0$, как и для уравнений второго порядка, является особым.

Конкретные применения показанных в настоящей статье преобразований составят предмет последующих статей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кард П.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 33, № 2, 137—146 (1984).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 18/III 1983

P. KARD

LINEAARSETE DIFERENTSIAALVÕRRANDITE MÕNINGAID TEISENDUSI

Asendus (7) teisendab lineaarse n-dat järku diferentsiaalvõrrandi (4), kus $f_0=f^n\neq 0$, sama järku võrrandiks (10), kus kordajad $g_m(x)$ on määratud valemiga (11). Üldisem asendus (37) teisendab 2. järku võrrandi (20) võrrandiks (38) ja 3. järku võrrandi (22) võrrandiks (47), kusjuures funktsioon u rahuldab esimesel juhul võrrandit (36) ja teisel juhul võrrandit (46).

P. KARD

ON SOME TRANSFORMATIONS ON THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

The substitution (7) transforms the n-th order linear differential equation (4), where $f_0=f^n\neq 0$, into the equation of the same order (10), the coefficients $g_m(x)$ of which are done by the formula (11). The more general substitution (37) transforms the second-order equation (20) into the equation (38) and the third-order equation (22) into the equation (47), the function u satisfying equations (36) or (46), respectively.